

FREQUENZEN DER ERDE

Klaus Piontzik, Claude Bärtels

1.0 – Magnetisches Erdfeld

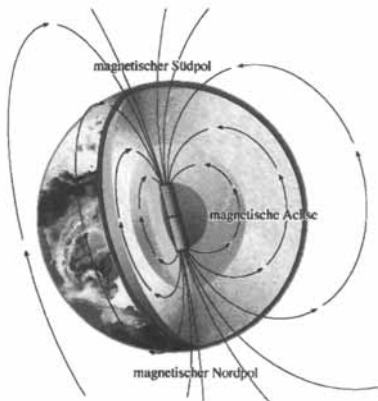


Abbildung 1.0.1 – Dipolfeld

Nimmt man gemessene Werte des Feldes, so lässt sich an den auftretenden vier magnetischen Polen (siehe Bild 1.3.1) anschaulich zeigen, dass das Dipolmodell nicht genügt, um das reale Erdmagnetfeld hinreichend genau zu erklären.

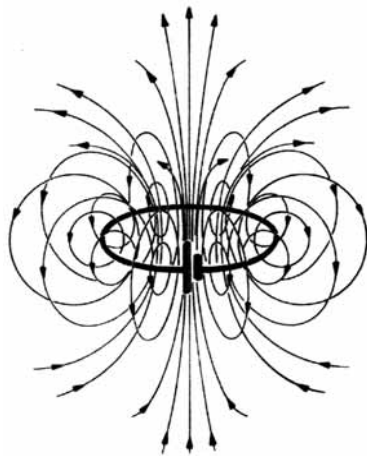


Abbildung 1.0.2 – Leiterschleife

Der mathematisch allgemein übliche Ansatz besteht darin, den auftretenden Term im Integral **in eine unendliche Reihe umzuwandeln**:

Aus der Schule, und aus den Medien, kennen wir das Magnetfeld der Erde stets als ein Feld, das dem Feld eines Stabmagneten entspricht. Es ist das sogenannte Dipolfeld. Historisch bedingt erklärt diese Sichtweise des Erdmagnetfeldes das Verhalten einer Inklinationsnadel. Diese steht am Pol senkrecht zur Erdoberfläche und am Äquator waagrecht zur Erdoberfläche.

Der physikalische Ansatz für ein solches Dipolfeld besteht in der Betrachtung des Magnetfeldes einer so genannten **Leiterschleife**.

Die mathematische Ableitung führt aber zu einer Differentialgleichung, in der ein sogenanntes **elliptisches Integral** auftaucht, für das keine geschlossene mathematische Lösung - in Form einer Gleichung - existiert.

Vereinfacht lässt sich das so schreiben:

$$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots$$

Dann geht man hin und **schneidet diese Reihe nach dem ersten Glied einfach ab**. Integriert man nun das übriggebliebene, so entsteht die allgemeine Gleichung für das Dipolfeld, die praktisch nur von der geographischen Breite φ abhängig ist.

1.0.1 - Gleichung:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2(90 - \varphi)} \quad \mu\text{T}$$

Die hier dargestellte mathematische Vorgehensweise zur Erreichung der Dipolgleichung kann, aufgrund der abgeschnittenen Restglieder, lediglich als eine **erste Näherung** betrachtet werden.

Fängt man an, die restlichen Glieder der unendlichen Reihe (aus der Leiterschleifenbetrachtung) zu integrieren, so erhält man das Quadrupolfeld, das Oktupolfeld usw. Insgesamt nennt sich das **Multipolentwicklung**.

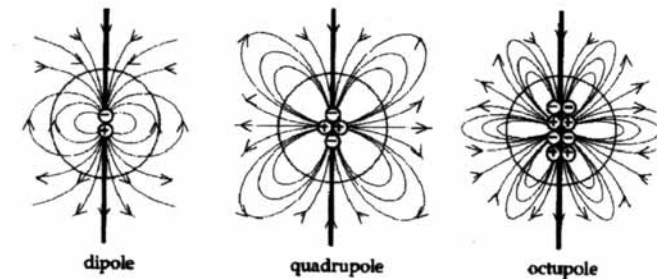


Abbildung 1.0.3 – Multipolentwicklung

1.1 – Gauß und Weber

Schon Gauß und Weber erkannten 1838, durch ihre Versuche mit dem Erdmagnetfeld, dass das Magnetfeld nicht einfach durch das Modell eines Stabmagneten bzw. einer Leiterschleife erklärt werden kann.

1838 erschien die „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus“ von C.F. Gauß und W. Weber in der sie folgende Potentialgleichung für das Erdmagnetfeld angeben:

1.1.1 - Gleichung:

$$V(\varphi, \lambda, r, t) = a \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (g_n^m(t) \cdot \cos(m\lambda) + h_n^m(t) \cdot \sin(m\lambda)) \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cdot P_n^m \cdot \sin \varphi$$

Die magnetische Flussdichte **B** lässt sich als Vektor mittels des Gradienten aus der Potentialgleichung ableiten:

1.1.2 - Gleichung:

$$\mathbf{B}(\varphi, \lambda, r, t) = -\nabla V(\varphi, \lambda, r, t)$$

Nach Gleichung 1.1.2 ist die magnetische Flussdichte **B** abhängig vom Breitengrad φ , vom Längengrad λ , Abstand **r** vom Mittelpunkt und der Zeit **t**.

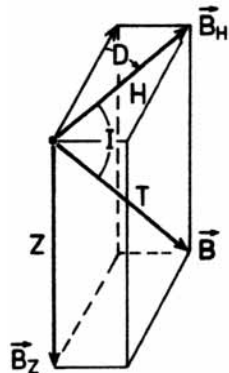


Abbildung 1.1.1 – Feldelemente

Aus diesem Vektor lassen sich die sogenannten **Feldelemente des Magnetfeldes** generieren. Also, die Deklination, die Inklination und die Totalintensität usw.

Die Gleichungen von Gauß und Weber für das Erdmagnetfeld werden bis heute benutzt.

Aus der Potentialgleichung bzw. der Theorie lassen sich aber die real auftretenden Koeffizienten in der Potentialgleichung nicht ermitteln. Dies geschieht über eine **Messung** des realen magnetischen Feldes der Erde.

Bemerkung:

Löst man die Klammern in der Potentialgleichung auf, so treten in der Gleichung von Gauß lediglich Produkte von Sinus- bzw. Kosinus-Funktionen, also tesserale Kugelflächenfunktionen bzw. Gitter auf. Das heißt: Schon Gauß und Weber legten bei ihren Betrachtungen des Erdmagnetfeldes **Kugelflächenfunktionen** zugrunde!!!

1.2 – Meßstationen

Das Magnetfeld der Erde wird weltweit durch mehr als 200 Messstationen erfasst.

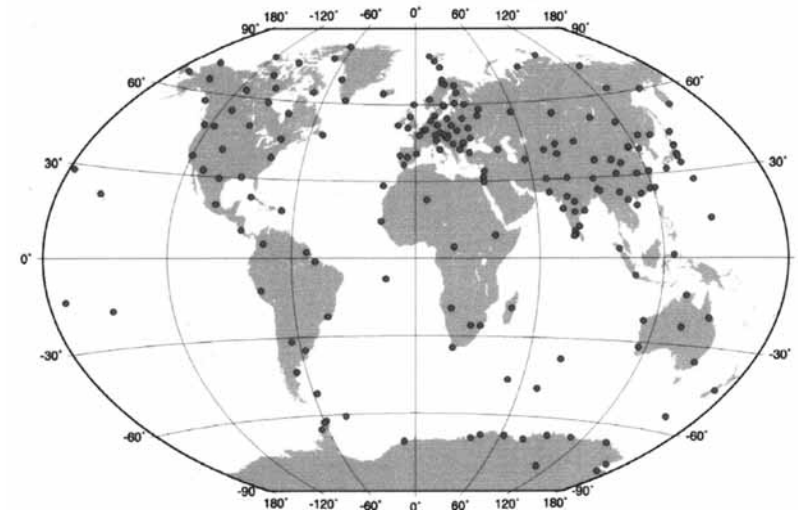


Abbildung 1.2.1 – Meßstationen

Seit einigen Jahrzehnten wird das Feld auch von Satelliten aus vermessen. Der erste Satellit war Magsat, der 1980 sechs Monate lang die Intensität und das gesamte Magnetfeld registrierte.

Seit 1999 befindet sich der dänische Satellit Ørstedt auf einer Erdumlaufbahn und seit Juli 2000 arbeitet der deutsche Satellit Champ.

Alle anfallenden Daten über das Erdmagnetfeld werden von der IUGG bzw. der IAGA erfasst und ausgewertet. Diese Werte dienen unter anderen als Grundlage zur Erstellung der Modelle **IGRF** und **WMM**.

Diese Modelle werden als Kartensätze herausgegeben und zwar für Deklination, Totalintensität, größte totale Änderungen, Horizontalintensität, Inklination, Nordintensität, Ostintensität und Vertikalintensität.

1.3 – Totalintensität – WMM 2005

Das "World Magnetic Model" (WMM) ist ein Erzeugnis der U.S. National Geospatial-Intelligence Agency (NGA).

Das WMM 2005 kann man über das „National Geophysical Data Center“ (NGDC) beziehen, mittlerweile ebenso über das Internet.

Das NGDC und das British Geological Survey (BGS) fertigten das WMM mit Unterstützung der NGA in den USA an, zusammen mit der „Defence Geographic Imagery“ sowie der „Intelligence Agency“ (DGIA) aus Großbritannien.

Das WMM wird als Standardmodell benutzt, für das US Department of Defense, das UK Ministry of Defence, der North Atlantic Treaty Organization (NATO), und dem World Hydrographic Office (WHO).

Es ist inzwischen auch in der zivilen Navigation weit verbreitet. Das Modell, die zugehörige Software und Dokumentation werden von der NGDC und der NGA verwaltet. Das Modell wird für jeweils 5 Jahre angefertigt

Wichtig für diese Untersuchung ist die Karte der Totalintensität, da hier eine bestimmte Art der Auswertung möglich ist.

Das Gesamtfeld also die Totalintensität an der Erdoberfläche für das **World Magnetic Model 2005** ist in der folgenden Abbildung 1.3.1 zu sehen.

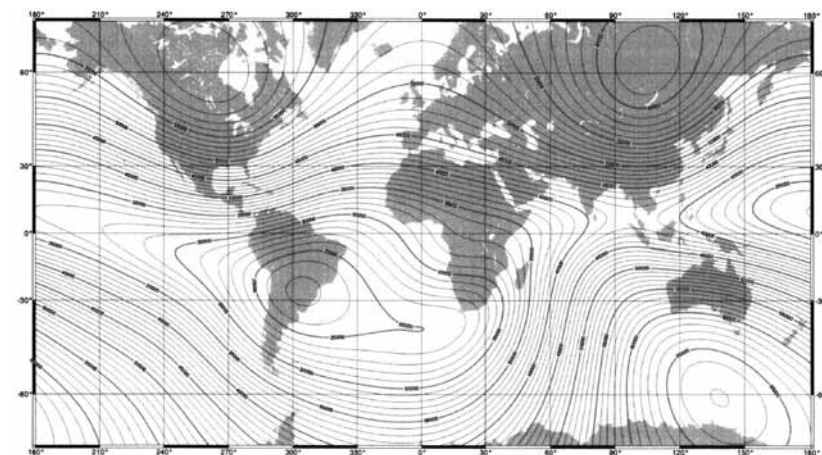


Abbildung 1.3.1 – WMM 2005

Auffallend sind hier die **vier** Extremwerte des Feldes (und nicht nur zwei wie beim Stabmagneten- bzw. Dipolmodell), wobei drei Maxima und ein Minimum vorliegen. Hinzu kommt noch ein Sattelpunkt (etwa in der Region Indonesien)

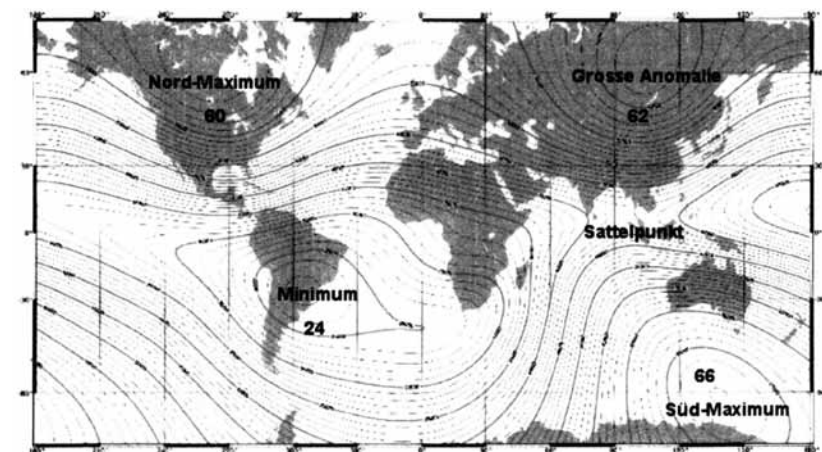


Abbildung 1.3.2 – Extremwerte des Feldes

Die Bezeichnungen der Extremwerte des magnetischen Feldes sind in der Geophysik so üblich.

Die Vierpolbildung ist mit der Dipoltheorie nicht mehr erklärbar.

Und bei Heranziehung des Multipolmodells gilt:

Durch die Umwandlung des Terms in eine Reihe ist der ganze Vorgang ein **mathematisch approximativer**, die Lösung also nur eine **mathematische Näherung**.

Die Frage nach **physikalischer Relevanz** bleibt dabei völlig offen! Es ist daher mit Recht zu bezweifeln, dass die Natur hier die gleiche Umsetzung benutzt hat.

1.4 – Temporäre Stabilität

Das gesamte Magnetfeld verändert - langfristig gesehen - seine Form,. Diese langsame Änderung wird als Säkularvariation bezeichnet und führt im Laufe der Zeit auch dazu, dass sich das Magnetfeld in seiner Polarität umkehrt. Laut Geoforschungszentrum Potsdam liegt die letzte Umpolung etwa 750.000 Jahre zurück.

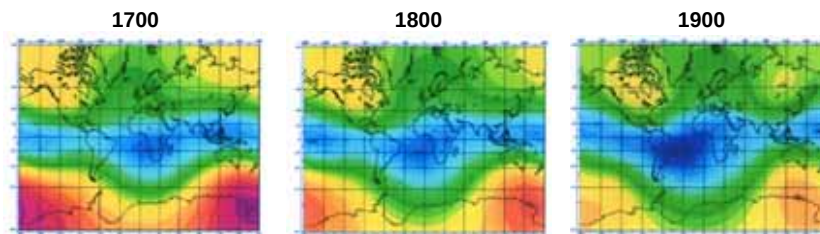


Abbildung 1.4.1 – Erdmagnetfeld

In den Abbildungen vom „World Data Center for Geomagnetism“ in Kyoto, ist die Situation noch einmal für die letzten dreihundert Jahre dargestellt. Diese Bilder beruhen auf geologischen Funden und Langzeitrückrechnungen des Erdmagnetfeldes.

Vergleicht man die Abbildungen mit den heutigen Modellen von 2005, so lässt sich quasi keine Änderung in der Feldstruktur feststellen. Es ändern sich zwar Intensitäten und auch die Extrema verändern etwas ihre Lage, aber auch hier lässt sich keine wesentliche Änderung in der **Gesamtfeldstruktur** feststellen.

**Das Feld der Totalintensität ist also temporär,
über längere Zeiträume, quasi konstant.**

Daher ist es auch für eine allgemeine Analyse des Erdfeldes bestens geeignet.

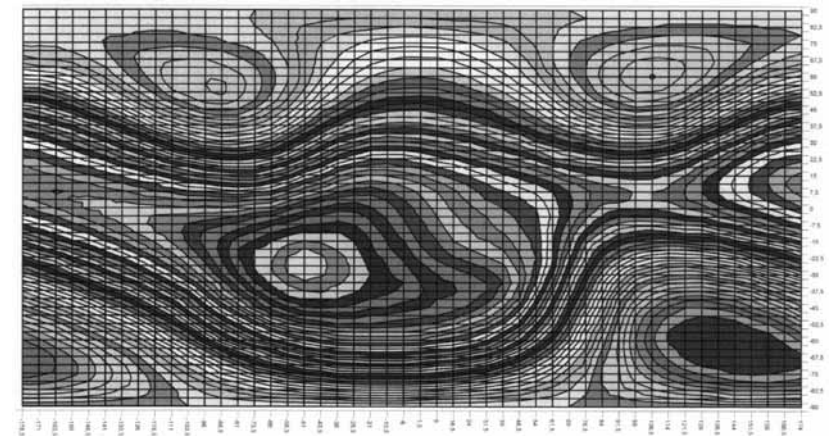


Abbildung 1.4.2 – Totalintensität 1980

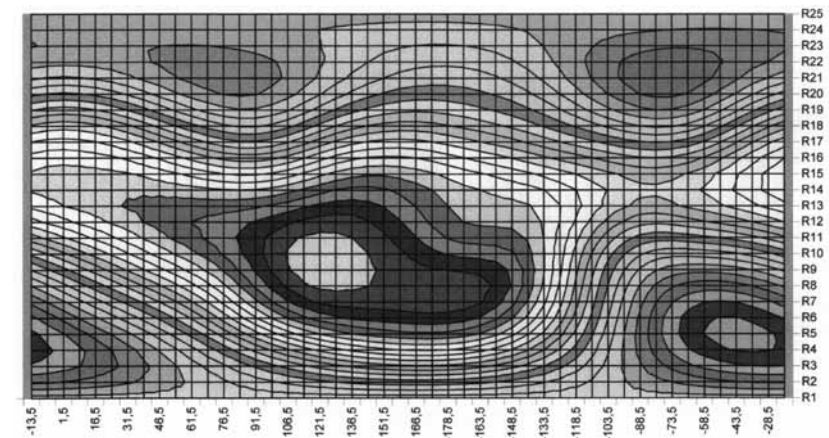


Abbildung 1.4.3 – Totalintensität 2012

Der Vergleich der Abbildungen zeigt, dass in der Struktur des Feldes keine größeren Abweichungen zwischen 1980 und 2012 vorhanden sind. Das Magnetfeld (Totalintensität) ist also während der letzten 30 Jahre hinreichend konstant geblieben.

1.5 – Fourier-Analyse Erdmagnetfeld

Der Ansatz ist auch hier eine Schwingungsbasis für das Erdmagnetfeld zu finden.

Und es existiert bereits eine mathematische Methode, nämlich die Fourier-Analyse, mit der eine gegebene periodische Funktion in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden kann.



Abbildung 1.5.1 – Totalintensität

Dazu wird die Graphik 1.5.1 für die Totalintensität in eine **Tabelle** der Totalintensitäten umgewandelt. So ist die Möglichkeit einer Auswertung gegeben. Außerdem wird dadurch eine 3D-Darstellung des Erdmagnetfeldes an der Erdoberfläche möglich.

Die Auswertung erfolgt hier über eine **zweidimensionale Fourieranalyse**. Da eine Fourieranalyse eine Zerlegung einer gegebenen Funktion in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen liefert, erhält man bei einer zweidimensionalen Fourieranalyse eine Summe von **Kugelflächenfunktionen**.

Und beim Erdmagnetfeld gelingt es tatsächlich eine Zerlegung in Kugelflächenfunktionen vorzunehmen.

1.5.1 – Fourier-Analyse

Das Gesamtfeld wird in einzelne - in diesem Fall in horizontale - **Schnitte** zerlegt. Mit jedem Schnitt lässt sich eine eindimensionale Fourier-Analyse ausführen.

Jeder Schnitt verläuft quasi entlang eines **Breitenkreises**. Von +90 Nord bis -90 Süd werden die Schnitte im Abstand von 7,5 Grad angelegt. Dies ergibt dann 25 Schnitte. (7,5 Grad = 800 Km)

Jeden Schnitt unterzieht man einer eindimensionalen (numerischen) Fourier-Analyse, mit der Variablen λ und der Schrittweite 7,5 Grad, d.h. mit 48 Punkten pro Schnitt. Es ergeben sich so insgesamt 1106 Punkte für die Analyse des Erdfeldes.

Als Grundlage bzw. Werkzeug der gesamten Analyse dient ein **numerisches** (eindimensionales) harmonisches Verfahren, wie es im Buch „Mathematik für Ingenieure“ von Brauch/Dreyer/Haacke beschrieben wird und auch als **Algorithmus von Goertzel** (und Reinsch) bekannt ist.

Dann lassen sich die 25 Schnitte, durch die Fourieranalyse bedingt, allgemein so darstellen:

$$Y_0 = \sum_{i=0}^n (a_{i0} \cdot \cos i\lambda + b_{i0} \cdot \sin i\lambda) \quad \text{bis} \quad Y_m = \sum_{i=0}^n (a_{im} \cdot \cos i\lambda + b_{im} \cdot \sin i\lambda)$$

Es entsteht ein Gleichungssystem von **m+1** Gleichungen mit jeweils **n+1** Gliedern.

Über die erzeugte Koeffizientenmatrix mit den **A_m** und **B_m** kann eine **weitere** Fourier-Analyse, mit der Variablen φ durchgeführt werden. Für jeden Punkt auf der Erde mit den Koordinaten λ, φ gilt dann:

$$Y = \sum_{j=0}^m (a_{j0} \cdot \cos j\varphi + b_{j0} \cdot \sin j\varphi) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m (a_{ji} \cdot \cos j\varphi + b_{ji} \cdot \sin j\varphi) \cdot (\cos i\lambda + \sin i\lambda)$$

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= a_{00} + a_{10} \cdot \cos \lambda + b_{10} \cdot \sin \lambda + a_{20} \cdot \cos 2\lambda + b_{20} \cdot \sin 2\lambda + \dots + a_{n0} \cdot \cos n\lambda + b_{n0} \cdot \sin n\lambda \\
 Y_1 &= a_{01} + a_{11} \cdot \cos \lambda + b_{11} \cdot \sin \lambda + a_{21} \cdot \cos 2\lambda + b_{21} \cdot \sin 2\lambda + \dots + a_{n1} \cdot \cos n\lambda + b_{n1} \cdot \sin n\lambda \\
 Y_m &= a_{0m} + a_{1m} \cdot \cos \lambda + b_{1m} \cdot \sin \lambda + a_{2m} \cdot \cos 2\lambda + b_{2m} \cdot \sin 2\lambda + \dots + a_{nm} \cdot \cos n\lambda + b_{nm} \cdot \sin n\lambda
 \end{aligned}$$

Über die Spaltenkoeffizienten wird eine zweite numerische harmonische Analyse durchgeführt:

$$\begin{aligned}
 Y &= \sum_{j=0}^m (a_{j0} \cdot \cos j\varphi + b_{j0} \cdot \sin j\varphi) \\
 &+ \sum_{j=0}^m (a_{j1} \cdot \cos j\varphi + b_{j1} \cdot \sin j\varphi) \cdot \cos \lambda \\
 &+ \sum_{j=0}^m (a_{j1} \cdot \cos j\varphi + b_{j1} \cdot \sin j\varphi) \cdot \sin \lambda \\
 &+ \sum_{j=0}^m (a_{j2} \cdot \cos j\varphi + b_{j2} \cdot \sin j\varphi) \cdot \cos 2\lambda \\
 &+ \sum_{j=0}^m (a_{j2} \cdot \cos j\varphi + b_{j2} \cdot \sin j\varphi) \cdot \sin 2\lambda \\
 &+ \\
 &+ \\
 &+ \sum_{j=0}^m (a_{jn} \cdot \cos j\varphi + b_{jn} \cdot \sin j\varphi) \cdot \cos n\lambda \\
 &+ \sum_{j=0}^m (a_{jn} \cdot \cos j\varphi + b_{jn} \cdot \sin j\varphi) \cdot \sin n\lambda
 \end{aligned}$$

Der erste Term für Y (also der zonale, sektorielle Teil) lässt sich noch so ergänzen:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^m (a_{j0} \cdot \cos j\varphi + b_{j0} \cdot \sin j\varphi) \\
 &= \sum_{j=0}^m (a_{j0} \cdot \cos j\varphi + b_{j0} \cdot \sin j\varphi) \cdot \cos 0 + \sum_{j=0}^m (a_{j0} \cdot \cos j\varphi + b_{j0} \cdot \sin j\varphi) \cdot \sin 0
 \end{aligned}$$

Durch die quantitative Analyse einerseits und dem mathematischen Verfahren andererseits bedingt, lässt sich folgende Gesamtgleichung für die magnetische Flussdichte an der Erdoberfläche erstellen:

1.5.1.1 - Gleichung:

$$B = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{ji} \cdot \cos j\varphi + b_{ji} \cdot \sin j\varphi) \cdot (\cos i\lambda + \sin i\lambda)$$

Löst man die Klammern auf, so treten nur **tesserales Kugelflächenfunktionen** also **Gitter** auf.

1.5.1.2 - Satz:

Das Magnetfeld der Erde (an der Erdoberfläche) lässt sich vollständig durch eine Summe von tesseralen Kugelflächenfunktionen (Gittern) beschreiben.

Aufgrund des allgemeinen Ansatzes der Fourier-Analyse und Gleichung 1.5.1.1 lässt sich noch folgende allgemeine Aussage machen:

1.5.1.3 - Satz:

Jedes Schwingungsgefüge auf bzw. um eine Kugel lässt sich vollständig durch eine Summe von tesseralen Kugelflächenfunktionen beschreiben.

1.5.2 – Quantitative Fourier-Analyse Erdmagnetfeld

Die quantitative also rein **numerische** Fourieranalyse des Erdmagnetfeldes (IGRF1984) ergibt folgendes Ergebnis für die magnetische Flussdichte an der Erdoberfläche:

1.5.2.1 - Gleichung:

Alle Werte in μT	Statisch	Zonal
$B = 47,2183 + 2,1544\cos\varphi + 11,3642\cos2\varphi - 1,7435\cos3\varphi - 1,0949\cos4\varphi - 1,0496\cos5\varphi$		
$-2,0121\cos2\lambda + 0,0354\cos4\lambda - 0,0159\cos6\lambda$ $-1,7028\sin2\lambda + 0,3562\sin4\lambda - 0,0195\sin6\lambda$		
Sektoriell		
$+ (-8,4184\sin\varphi + 8,8172\sin2\varphi - 5,2834\sin3\varphi - 0,2577\sin4\varphi + \dots)\cos\lambda$ $+ (+3,5852\sin\varphi - 2,8201\sin2\varphi - 0,5036\sin3\varphi + 1,1381\sin4\varphi + \dots)\sin\lambda$ $+ (-1,6626\cos\varphi + 0,6739\cos2\varphi + 1,6343\cos3\varphi + 1,0912\cos4\varphi + \dots)\cos2\lambda$ $+ (-0,5851\cos\varphi + 0,4514\cos2\varphi + 0,4037\cos3\varphi + 1,1604\cos4\varphi + \dots)\sin2\lambda$ $+ (0,9031\sin\varphi - 0,8500\sin2\varphi + 0,5205\sin3\varphi + 0,4141\sin4\varphi + \dots)\cos3\lambda$ $+ (0,6055\sin\varphi + 0,2544\sin2\varphi + 0,1402\sin3\varphi + 0,0423\sin4\varphi + \dots)\sin3\lambda$ $+ (-0,2127\cos\varphi + 0,0618\cos2\varphi + 0,2882\cos3\varphi + \dots)\cos4\lambda$ $+ (-0,0225\cos\varphi - 0,3858\cos2\varphi + 0,0395\cos3\varphi + \dots)\sin4\lambda$		
Tesseral		

Die Auswertung liefert alle drei Arten von Kugelflächenfunktionen, also zonale, sektorielle und tesserale Formen, sowie einen statischen Anteil. Der zonale und sektorielle Teil der Kugelflächenfunktionen lässt sich zu einem Gitter zusammen fassen, dem **Gitter ZS**. Dieses verhält sich dann wie eine tesserale Kugelflächenfunktion, also wie ein Gitter.

1.5.2.2 - Gleichung: Gitter ZS = Zonal + Sektoriell

$$B_{ZS} = B_z + B_s$$

Damit lässt sich auch das Erdmagnetfeld als Summe tesseraler Kugelflächenfunktionen darstellen.

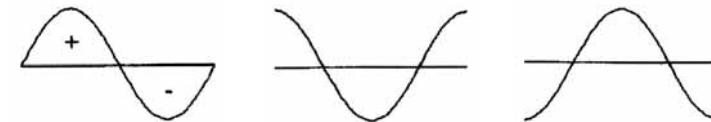
Bemerkung:

In der Gleichung 1.5.2.1 existieren 17 Intensitätswerte die zwischen einem und elf Mikrottesla liegen. Alle anderen Werte liegen im **Nanotesla**-Bereich!!!

2.0 – Ansatz für ein Schwingungsmodell

Ziel dieses Kapitels ist es eine Beschreibung von mathematischen und physikalischen Grundbedingungen zu liefern, die der Entwicklung einer Gleichung für ein Schwingungsgefüge dienen und damit eine Quantifizierung des Modells erlauben. Der Ansatz erfolgt auf der Basis von **Schwingungen auf bzw. um eine Kugel herum**.

Beispiele für Schwingungsmöglichkeiten:



Sinus

Kosinus

Abbildung 2.0.1 – Schwingungen

Sinus bzw. Kosinus = Schwingung = Welle

Für physikalische Schwingungen gilt:

2.01 - Gleichung: $f \cdot \lambda = c$

(Frequenz mal Wellenlänge gleich Lichtgeschwindigkeit)

Wie erhält man Schwingungen um eine Kugel herum? - **Analog** zum Bohrschen Atommodell, d.h. wenn man nach De Broglie das umlaufende Elektron als Welle auffasst:

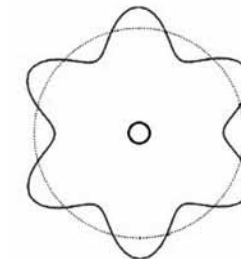


Abbildung 2.0.2 – Schwingungen um eine Kugel

Es passt nur eine ganzzahlige Anzahl von Schwingungen um die Kugel.

2.02 - Gleichung: $n \cdot \lambda \Leftrightarrow 360^\circ = 2\pi$ $n \in \mathbb{N}$

Die Wellenlänge ist proportional zum Kreiswinkel Alpha:

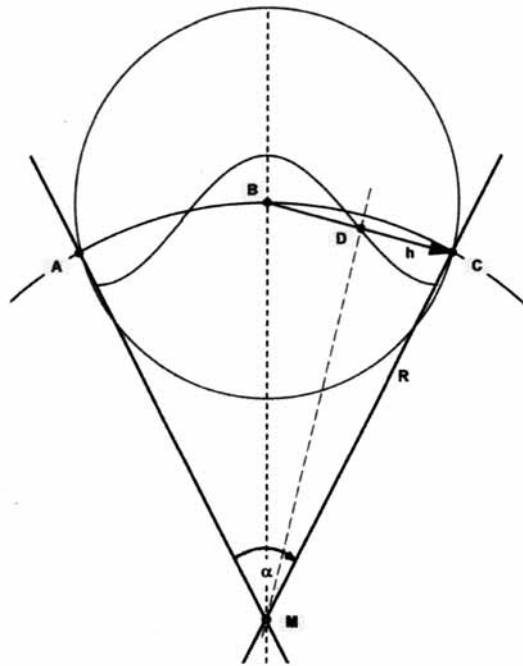


Abbildung 2.0.3 – Wellenlänge und Kreiswinkel

2.03 - Gleichung: $\lambda \Leftrightarrow \alpha$

Bedingung für n Schwingungen um eine Kugel:

2.04 - Gleichung: $n \cdot \alpha = 2\pi$ $n \in \mathbb{N}$

Rein theoretisch ist noch folgende Form möglich:

2.05 - Gleichung: $n \cdot \alpha = 2\pi \cdot m$ $m, n \in \mathbb{N}$

Hier schließt sich der Schwingungskreis nicht schon nach einer Umdrehung sondern erst nach m Umdrehungen.

2.1 – Kugelflächenfunktionen

Eine stehende Welle um eine Kugel lässt sich als stationärer Zustand interpretieren. Damit ist jeder Zustand einer Welle räumlich fixiert. Die Frage ist nun: wie viele Wellen passen auf bzw. um eine Kugel?

In der klassischen Mechanik versteht man unter Freiheitsgrad die Zahl der frei wählbaren, voneinander unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten eines Systems.

Ein starrer Körper im Raum hat den Freiheitsgrad $f=6$, denn man kann den Körper in drei voneinander unabhängige Richtungen bewegen und in drei voneinander unabhängigen Ebenen drehen.

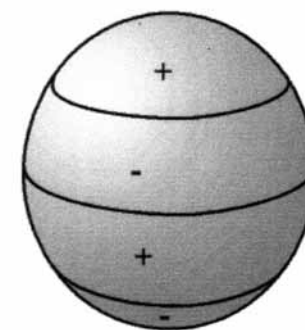
Da eine Kugel rotationssymmetrisch ist, spielen Drehungen keine Rolle. Eine Kugel besitzt demnach 3 Freiheiten bezüglich einer Wellenausbreitung. Daher sind drei unabhängige Wellen um die Kugel herum möglich.

Durch die Kugelgestalt bedingt, lassen sich die drei Freiheiten auch als Kugelkoordinaten darstellen.

Beispiel Erde:

- 1) Eine Schwingung läuft von Nordpol über Südpol wieder zum Nordpol
- 2) Die zweite Schwingung läuft um den Äquator herum
- 3) Die dritte stehende Welle verläuft radial – vom Mittelpunkt ausgehend

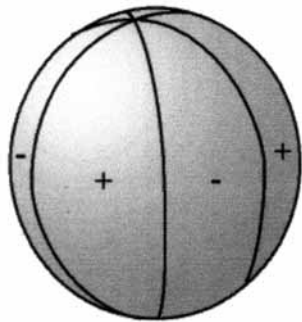
Für die ersten beiden Beispiele existiert ein mathematisches Konzept, dass sich hier für eine Darstellung eignet, nämlich die **Kugelflächenfunktion**. Stehende Wellen auf einer Kugeloberfläche können als Kugelflächenfunktionen behandelt werden. Es existieren 3 Arten:



Zonale Kugelflächenfunktionen hängen lediglich vom Breitengrad ab.

$\sin \varphi$
 $\cos \varphi$

Abbildung 2.1.1 – Zonale Kugelflächenfunktion

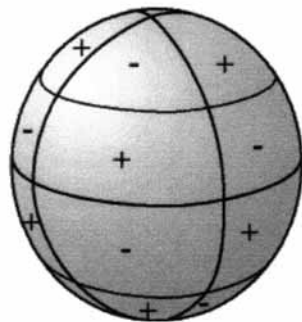


Sektorielle Kugelflächenfunktionen hängen lediglich vom Längengrad ab.

$$\sin\lambda$$

$$\cos\lambda$$

Abbildung 2.1.2 – Sektorielle Kugelflächenfunktion



Tesserales Kugelflächenfunktionen hängen vom Breitengrad und vom Längengrad ab.

$$\sin\varphi \cdot \sin\lambda$$

$$\sin\varphi \cdot \cos\lambda$$

$$\cos\varphi \cdot \sin\lambda$$

$$\cos\varphi \cdot \cos\lambda$$

Abbildung 2.1.3 – Tesserales Kugelflächenfunktion

2.1.1 - Definition: **Tesserales Kugelflächenfunktionen**
 = Produkt zweier Schwingungen
 = 2 senkrecht aufeinander stehende Wellen
 = **Gitter**

Erläuterung:

Ein komplettes streckenmäßig quadratisches Gitter auf einer Kugel lässt sich nicht verwirklichen.
 Es entstehen lediglich Gittersysteme, die wie das geographische Gittersystem gestaltet sind. Es existieren immer **zwei** Pole. Die zugehörigen „Meridiane“ und „Breitenkreise“ bilden dann das **Gitter**.

2.2 – Addition und Multiplikation von Schwingungen

Tesserales Kugelflächenfunktionen lassen sich durch zwei Sinus - bzw. Kosinuswellen darstellen, die senkrecht aufeinander stehen und sich additiv oder multiplikativ überlagern.

2.2.1 - Null-Gitter

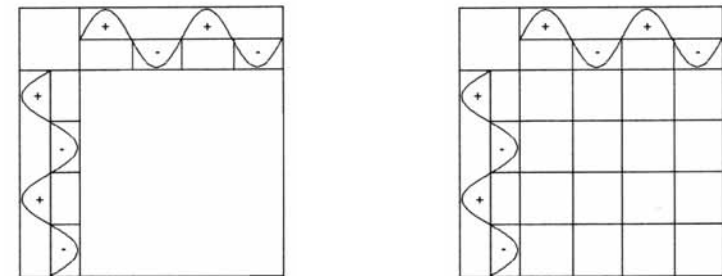


Abbildung 2.2.1 – Nullgitter

Die Nullpunkte der beiden Wellen werden auf die Betrachtungsebene übertragen, wie in Bild 2.2.1 rechts dargestellt. Dies entspricht einer tesseralen Kugelflächenfunktion mit: $G_0 = \sin\alpha \cdot \sin\beta$
 Zwei senkrechte Wellen lassen sich dann nach folgenden **qualitativen** Regeln addieren:

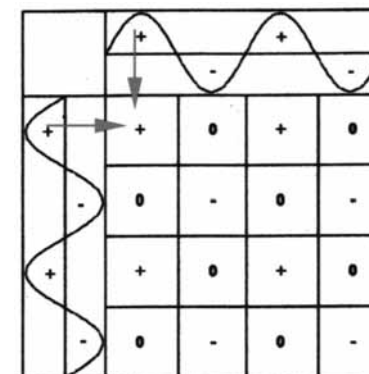


Abbildung 2.2.2 – Multiplikation

2.2.2 - Polbildung:

- 1) + und + ergibt +
- 2) – und – ergibt –
- 3) + und – ergibt 0

Wie zu sehen ist, ergeben sich Felder mit verschiedenen Vorzeichen bzw. verschiedenen Zuständen. Es existieren insgesamt drei Schwingungszustände: **positiv(+)**, **negativ(-)**, **neutral(0)**

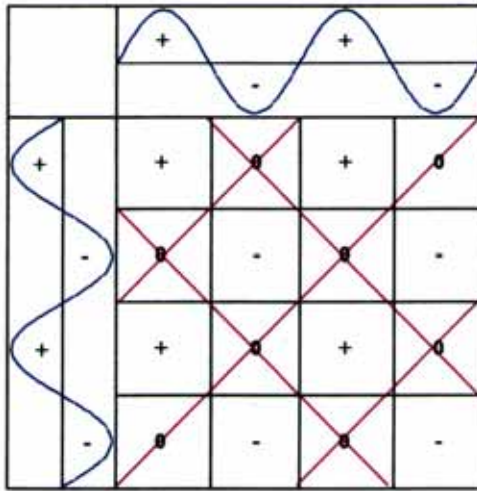


Abbildung 2.2.3 – erzeugtes Gitter

2.2.3 - Gitterbildung:

Auffallend ist, dass alle Nullfelder **diagonal** zueinander liegen.

Verbindet man nun die Nullfelder miteinander so ergibt sich das nebenstehende Bild.

2.2.4 - Definition: Das (rote) gitterartige Gefüge heißt dann **Grundfeld** bzw. **Gitter** bzw. **erzeugtes Feld**. Die (blauen) erzeugenden Wellen heißen **Grundschnwingungen**.

Für das Grundfeld gilt:
 $G = \sin\alpha + \sin\beta$

Während der mathematische Begriff der Kugelflächenfunktion nicht nach der Ursache des Schwingungsfeldes fragt, so müssen bei der physikalischen Betrachtung die zugrunde liegenden Wellen mit einbezogen werden.

Dies leistet der Begriff des Grundfeldes. **Das Grundfeld ist durch die Grundschnwingungen definiert.**

Die Bezeichnungen **Nullgitter** und **Grundfeld** sind als physikalische Äquivalente zum mathematischen Begriff der tesseralen Kugelflächenfunktion zu sehen.

Die Addition/Multiplikation der Wellen erfolgte wie gesehen zuerst in einer diskreten Art und Weise.

Bei einer kontinuierlichen daher also punkweisen Addition/Multiplikation zweier senkrecht aufeinander stehender Wellen ergeben sich Gittermuster, mit abwechselnden Polaritäten der Gitterfelder, wie in Abbildung 2.2.4 dargestellt.

Hier zeigt sich, dass die Feldmaxima und Feldminima in der Mitte der Quadrate **punktförmig** auftreten, während die **Linien aus Nullwerten bestehen**.

Die Feldmaxima sind als Hügel zu erkennen, während die Täler durch die Feldminima gebildet werden

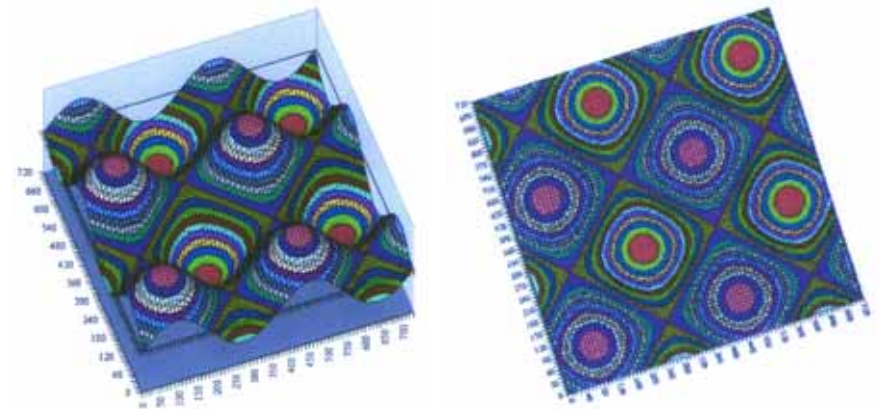


Abbildung 2.2.4 – erzeugtes Gitter

Im linken Bild sind unten links und rechts die erzeugenden Schwingungen zu erkennen. Gut zu sehen ist auch, dass jeweils **zwei** erzeugte Gitterfelder wiederum eine (erzeugte) Schwingung ergeben.

2.2.5 - Definition: **Gitter**
 = zweidimensionales Schwingungsgefüge

Es ist möglich hier noch ein zweites Gitter einzuzichnen. Und zwar das **Maximalgitter**.

Es verbindet die Feldmaxima und Minima, also die Hörgespitzen und die Talsohlen der Abbildung 2.2.4 und stellt den **extremalen** Verlauf des Feldes dar.

Dies erlaubt **zwei** Sichtweisen des Gitters:

2.2.6 - Definition:

- 1) das erzeugte Gitter wird in der Ebene der **Grundschnitte** beschrieben: $G = \sin\alpha + \sin\beta$
- 2) Das erzeugte Gitter wird in der **Gitterebene** selber beschrieben: $G = \sin\varphi \cdot \sin\lambda$

Beide Koordinatensysteme unterscheiden sich dadurch, dass sie um 45 Grad gegeneinander gedreht sind.

Zur Illustration:

Ein physikalisches Analogon zum Grundfeld bilden die

Chladni-Klang-Figuren

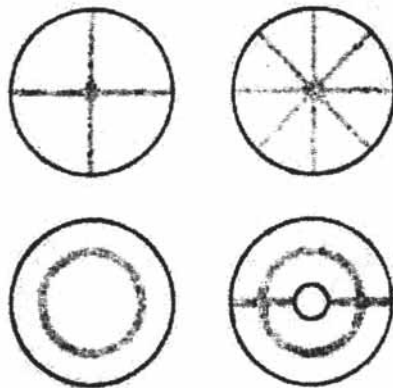


Abbildung 2.2.5 – Chladni-Klangfiguren

Zur Erzeugung der Figuren wird eine Metallplatte mit Sand bestreut und anschließend in Schwingung versetzt. Bei bestimmten Frequenzen, den Eigenfrequenzen der Platte, tritt Resonanz auf und die gesamte Platte beginnt zu schwingen. Dabei bleibt der Sand genau an den Stellen liegen, an denen die Amplitude der Schwingung Null ist.

2.3 – Huygensches Prinzip

Nach Kapitel 2.1 besitzt eine Kugel den Freiheitsgrad $f=3$. Durch die Verwendung von Kugelflächenfunktionen wären 2 Freiheiten abgedeckt. Die dritte Freiheit, also die **radiale** Richtung, fehlt noch. Dazu wird das Verständnis einer physikalischen Darstellung benötigt, mit dem sich die Ausdehnung physikalischer Wellen beschreiben lässt: **das huygensche Prinzip**.

Das huygensche Prinzip geht von einer Quelle **S** aus, die gleichförmig Wellenfronten nach allen Seiten hin erzeugt. Um die resultierende Wellenfront im Punkt **P** zu erhalten ist es aber nicht notwendig die gesamte Ausbreitung von **S** aus zu betrachten.

Das **huygensche Prinzip** sagt, dass jeder Punkt (**O**) einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Welle betrachtet werden kann, der sogenannten **Elementarwelle**.

Die Lage der resultierenden Wellenfront in **P** ergibt sich durch Überlagerung (Superposition) sämtlicher Elementarwellen.

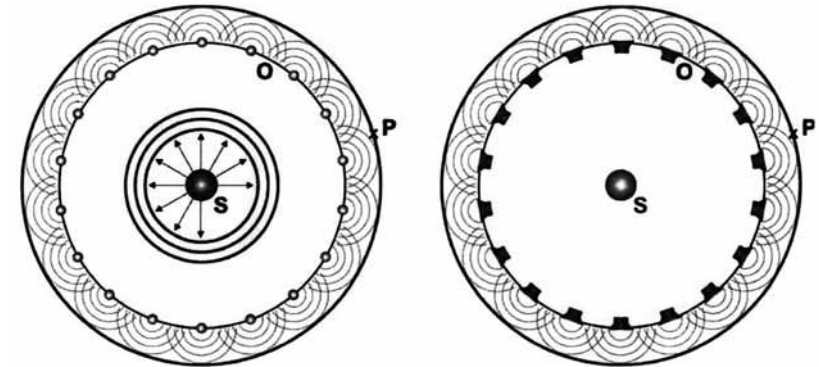
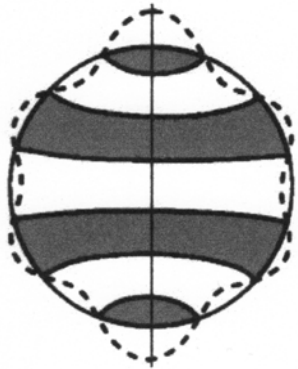


Abbildung 2.3.1 – Huygensches Prinzip

Die **Wellenursprünge** (O) liefern durch Superposition der **Elementarwellen** die resultierende Wellenfront (P).

In **zwei** Dimensionen sind Elementarwellen **kreisförmig**.

In **drei** Dimensionen sind Elementarwellen **kugelförmig**.



Anwendung des Huygenschen Prinzips für eine stehende Welle um eine Kugel:

Extremwerte der Welle
= Quellen
= Wellenursprünge

1 Schwingung = 2 Quellen

Abbildung 2.3.2 – Wellenursprünge

Das folgende Bild zeigt den Schwingungszustand für **eine** Schwingung nach dem Huygenschen Prinzip mit einem Maximum (Wellenberg) als Quelle.

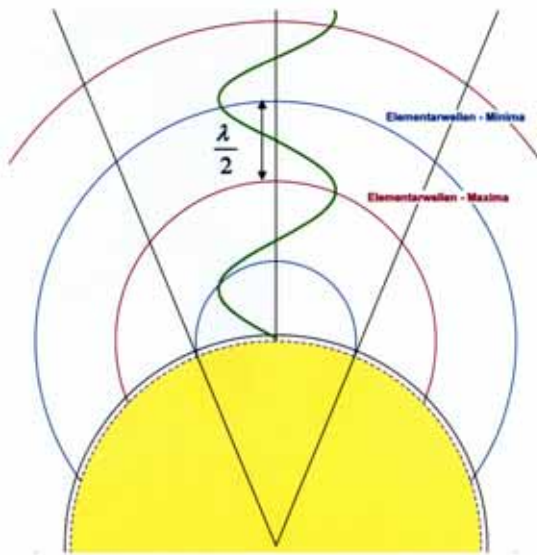


Abbildung 2.3.3 – Elementarwellen

Da eine Welle aus Maxima und Minima besteht, bilden sich die Elementarwellen als Minimalfronten (blau) und Maximalfronten (rot) aus. Zwischen den Extremalfronten existieren natürlich auch noch Nullfronten.

2.4 – Grundschrwingungen

Die bisherigen Betrachtungen erlauben nun eine erste Berechnung für eine Welle, die sich um eine Kugel z.B. die Erde herum aufbaut. Es muss noch berücksichtigt werden, dass die Wellenausbreitung **linear** stattfindet, und **nicht** entlang der gekrümmten Kugeloberfläche.

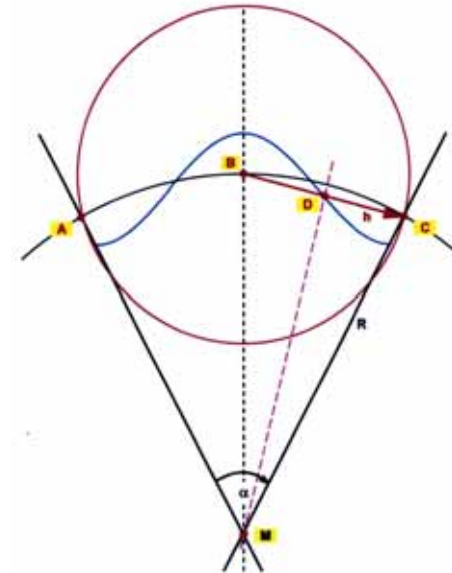


Abbildung 2.4.1 – Wellenausbreitung

Nach dem **Huygenschen Prinzip** dienen die Punkte **A**, **B**, **C** also die Extremalpunkte, als **Quellpunkte** der stehenden Welle (blau)

Elektromagnetische Wellen breiten sich **kugelförmig** von einem Punkt aus. (rot)

Wenn Punkt **B** der Ausgangspunkt ist, so entspricht die Strecke **BDC = h** dem Weg der Welle.

Da ein **stationärer** Zustand herrscht, genügt es den Weg der Welle **von einer Quelle zur nächsten Quelle** zu betrachten.

Damit ist

$$h = \frac{\lambda'}{2}$$

Das Dreieck **MCD** im Bild ist rechtwinklig im Punkt **D** und es gilt:

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \frac{h}{2R} = \frac{h}{2R}$$

Umstellen nach **h** ergibt:

$$h = 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{4} = 2R \cdot \sin \frac{\pi}{2n} = \frac{\lambda'}{2}$$

Da jetzt alle Größen bekannt sind kann die Wellenlänge bestimmt werden:

2.4.1 - Gleichung: $\lambda' = 4R \cdot \sin \frac{\pi}{2n}$

In der Gleichung steht **R** für den Radius der Erde, **n** für die Anzahl der Schwingungen.

Daraus ergibt sich die **Frequenzgleichung für Grundschrwingungen**:

2.4.2 - Gleichung: $f = \frac{c}{4R \cdot \sin \frac{\pi}{2n}}$ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Die **Grundfrequenz** ergibt sich für **n=1**:

2.4.3 - Gleichung:

$$f_o = \frac{c}{4R}$$

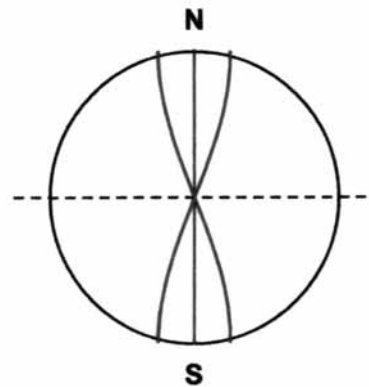


Abbildung 2.4.1 – Grundschrwingung

Dies entspricht auch der Schwingung eines Stabes mit freien Enden, dessen Länge gleich dem Durchmesser der Kugel ist.

2.5 – Radiale Struktur

Das Bild zeigt den Schwingungszustand für **n** Schwingungen, wenn das huygensche Prinzip auf alle Quellen angewendet wird. Die Maximalfronten sind rot, die Minimalfronten blau eingezeichnet.

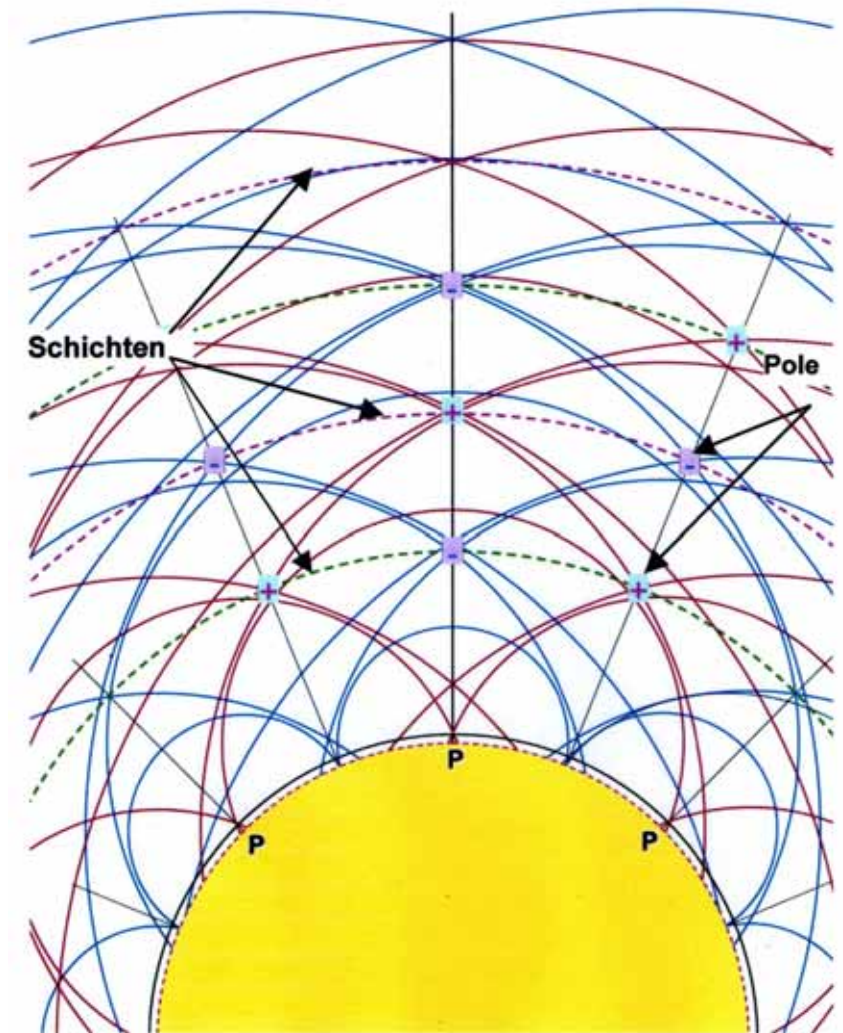


Abbildung 2.5.1 – Superposition von Wellen

2.5.1 – Schalenbildung

Die Superposition der Elementarwellen erfolgt nach den selben Regeln wie in Kapitel 2.2.

2.5.1.1 - Definition: Polbildung

Durch die Superposition der positiven Elementarwellen bilden sich **Plus-Pole**.

Durch die Superposition der negativen Elementarwellen bilden sich **Minus-Pole**.

Durch die Superposition von positiven und negativen Elementarwellen bilden sich **Nullpole**.

2.5.1.2 - Definition: Schichtenbildung

Durch die Superposition der Elementarwellen bilden sich **Pole** (+, -, 0) die auf **konzentrischen Kugelschalen** liegen im folgenden **Schichten = L** genannt.

2.5.1.3 - Definition: Wandbildung

Zwischen diesen Schichten entstehen **Nullpole**, die ebenfalls auf **konzentrischen Kugelschalen** liegen und im folgenden **Nullwände** genannt werden.

Durch die **Interferenz** verschiedener Wellen entstehen Schwingungsmaxima und Minima bzw. **Schwingungsschichten**, siehe nebenstehende Abbildung 2.5.1, die die Erde **kugelförmig** einhüllen.

Die Schichten auf denen die Pole liegen lassen sich berechnen. In der folgenden Ableitung wird ein geometrischer Ansatz zur **Berechnung der Distanz einer Schicht vom Erdmittelpunkt** gewählt.

2.5.2 – Berechnung der Schichten

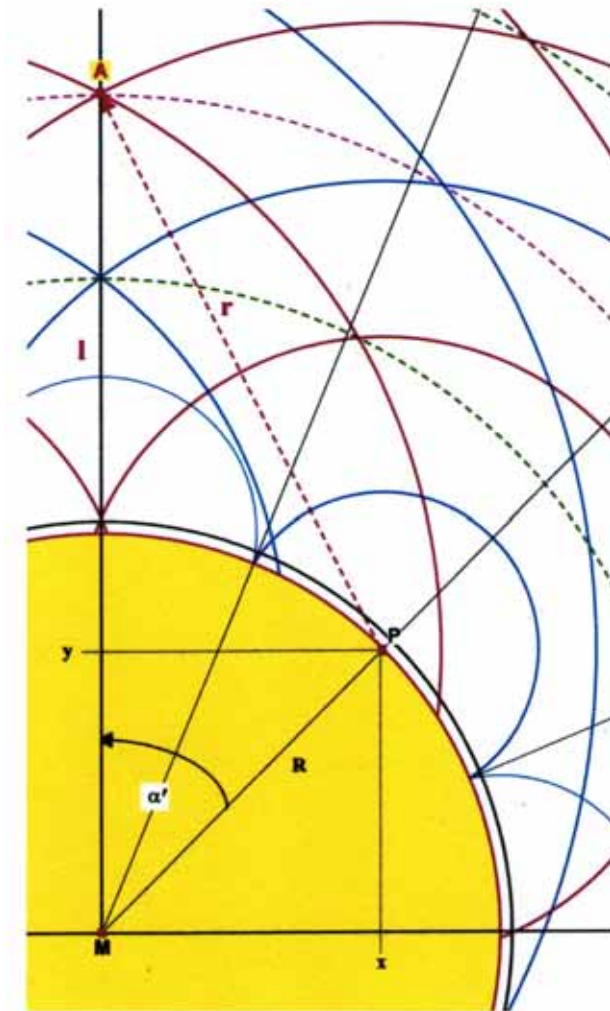


Abbildung 2.5.2 – Distanzberechnung der magnetischen Schichten

Zu bestimmen ist also der Mittelpunktabstand **$MA = I'$** einer magnetischen Schicht.

Für die Strecke **MA** gilt:

$$l' = y + l$$

und

$$l = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Es gelten die Beziehungen:

$$x = R \cdot \sin \alpha' \quad \text{und} \quad y = R \cdot \cos \alpha'$$

Mit dem Grundhüllenradius $L_0 = R = 6355758,426$ m

Beruhend auf Kapitel 2 lässt sich jeder Schwingung ein bestimmter Winkel α zuordnen:

$$\text{Für den Grundwinkel gilt:} \quad \alpha = \frac{2\pi}{n} \quad \text{mit} \quad n \in N_0$$

n ist die Anzahl der Schwingungen um den Umfang herum. Alternativ wäre hier auch die Anwendung von Gleichung 2.05 möglich.

Der Abstand von einem Quellpunkt des Feldes zum nächsten beträgt die Hälfte des Winkels Alpha. Berücksichtigt man alle Quellpunkte, so treten diese in ganzzahligen Vielfachen des halben Grundwinkels auf.

Es gilt also:

$$\text{Vielfache des Winkels:} \quad \alpha' = m \cdot \frac{\alpha}{2} \quad \text{mit} \quad m \in N_0 \quad \text{und} \quad m \leq n$$

In der nebenstehenden Abbildung gilt für den Quellpunkt **P**: $m=2$

Die Strecke **PA=r** entspricht dem Weg den die Welle zurücklegt. Vom Quellpunkt **P** ausgehend bis zu der Schwingungsschicht (Punkt A), die zu bestimmen ist.

Durch den stationären Zustand bedingt, entstehen Maximal- und Minimalfronten, die sich kugelförmig um den Quellpunkt, in regelmäßigen Abständen ausbilden.

Nach Kapitel 2 entspricht jeweils ein Abstand der halben Wellenlänge. Daher ist der Weg der Welle bis zur Schwingungsschicht stets ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge:

Die von der Welle zurückgelegte Strecke:

$$r = k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit} \quad k \in N_0$$

In Abbildung 12.1 gilt für den Wellenweg **PA**: $k=4$

$$\text{Für die Wellenlänge gilt:} \quad \lambda = 4R \cdot \sin \frac{\pi}{2n} = 4R \cdot \sin \frac{\alpha}{4}$$

Einsetzen aller behandelten Terme in die Gleichung für l' führt zu folgendem Ergebnis:

2.5.2.1 - Gleichung:

$$l' = R \cdot \left(\cos \alpha' + \sqrt{4k^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \alpha'} \right)$$

Werden Alpha und Alpha strich noch durch die entsprechenden Terme aus den vorherigen Betrachtungen ersetzt, so entsteht folgende Endgleichung:

2.5.2.2 - Gleichung:

$$L = R \cdot \left(\cos \frac{m\pi}{n} + \sqrt{4k^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2n} - \sin^2 \frac{m\pi}{n}} \right) \quad n, m, k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

R = Radius der Kugel, **n** = Anzahl der Schwingungen

m = Anzahl der Quellen – aus Symmetriegründen $1 \leq m \leq n$

k = Anzahl der halben Grundwellenlänge um eine Schicht zu erreichen

n, m, k sind ganzzahlige Parameter die, bei sukzessiver Anwendung, eine Tabelle von Schichten **L** liefern

2.5.2.3 - Satz:

Mit dem Radius **R** der Kugel sind auch **alle** möglichen Schichten **L** gegeben.

2.5.2.4 - Definition:

Es ergibt sich diese **vereinfachte Sicht des resultierenden Feldes**:

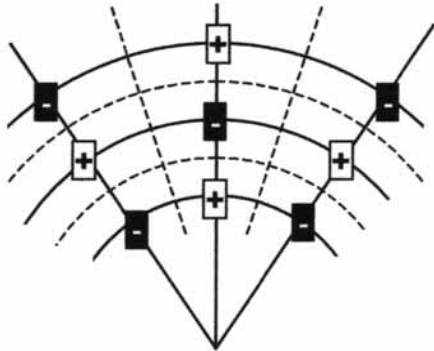


Abbildung 2.5.3 – Gitterbildung

Durchgezogene Linien = Extremal-Linien = Pol-Schichten
Gestrichelte Linien = Null-Linien = Nullwände

Es existieren **zwei** Betrachtungsmöglichkeiten:

2.5.2.5 - Satz: Die **Pole** bilden ein gitterförmiges radiales **Schichtensystem**.

Die Polschichten sind **stationäre Extremalzustände**.

Betrachtet man zwei direkt übereinander liegende Polschichten, so besitzen diese Schichten stets eine gegenphasige Ordnung der Pole zueinander.

2.5.2.6 - Satz: Die **Nullwände** bilden ein gitterförmiges radiales **Schichtensystem**.

Die **Pole** liegen im Mittelpunkt des jeweils **einshüllenden Null-Feldes**.

2.5.3 – Normierung

Die Schichten auf denen die Pole liegen lassen sich nach Kapitel 2.5 folgendermaßen berechnen:

$$L = R \cdot \left(\cos \frac{m\pi}{n} + \sqrt{4k^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2n} - \sin^2 \frac{m\pi}{n}} \right) \quad n, m, k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

n, m, k sind ganzzahlige Parameter die, bei sukzessiver Anwendung, eine Tabelle von Schichten **L** liefern. Mit dem Radius **R** der Kugel sind auch alle möglichen Schichten **L** gegeben.

Wenn **R=1** gesetzt wird ist eine Normierung der Schichtentabelle möglich.

2.5.3.1 - Normiertes Schichtungsgefüge

k	1	2	3	4	5	6	7	8
n m								
1 1	1	3	5	7	9	11	13	15
1 2	3	5	7	9	11	13	15	17
2 1	1	√7	√17	√31	7	√71	√97	√127
2 2	√2-1	2√2-1	3√2-1	4√2-1	5√2-1	6√2-1	7√2-1	8√-1
2 3	1	√7	√17	√31	7	√71	√97	√127
2 4	√2+1	2√2+1	3√2+1	4√2+1	5√2+1	6√2+1	7√2+1	8√2+1
3 3	0	1	2	3	4	5	6	7

Auf dem Cover dieses Buches ist ein normiertes Schichtungsgefüge abgebildet. Deutlich ist zu erkennen, dass die Verteilung nicht gleichmäßig ist. Es bilden sich Häufungen und auch Lücken.

2.5.3.2 - Allgemeines normiertes Schichtungsgefüge

n	m	L(k)
1	1	$2k-1$
1	2	$2k+1$
2	1	$\sqrt{(2k^2-1)}$
2	2	$k\sqrt{2}-1$
2	3	$\sqrt{(2k^2-1)}$
2	4	$1+k\sqrt{2}$
3	1	$\frac{1}{2} + \sqrt{(k^2 - \frac{3}{4})}$
3	2	$-\frac{1}{2} + \sqrt{(k^2 - \frac{3}{4})}$
3	3	$k-1$
4	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{(k^2(2-\sqrt{2}) - \frac{1}{2})}$
4	2	$\sqrt{(k^2(2-\sqrt{2}) - 1)}$
4	3	$-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{(k^2(2-\sqrt{2}) - \frac{1}{2})}$
4	4	$k\sqrt{(2-\sqrt{2})} - 1$
5	5	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)k-1$
6	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{(k^2(2-\sqrt{3}) - \frac{1}{4})}$
6	2	$\frac{1}{2} + \sqrt{(k^2(2-\sqrt{3}) - \frac{3}{4})}$
6	3	$\sqrt{(k^2(2-\sqrt{3}) - 1)}$
6	6	$k\sqrt{(2-\sqrt{3})} - 1$

2.6 – Radiale stehende Wellen

Die erzeugten Schichten **L** bilden eine **radiale stehende Welle**.

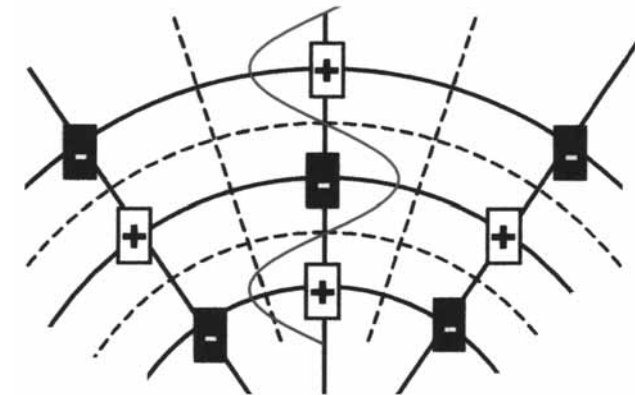


Abbildung 2.6.1 – Radiale Welle

Die resultierenden Schichtfrequenzen bzw. Wellenlängen können berechnet werden:

2.6.1 - Gleichung: $\lambda_n = L_{n+2} - L_n$

Jede erzeugte Schicht **L** kann ebenfalls als **radiale stehende Welle** verstanden werden.

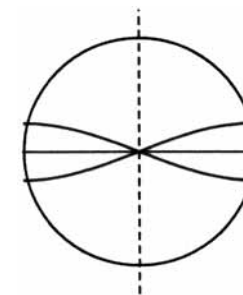


Abbildung 2.6.2 – Radiale Grundwelle

Die Schwingungsbäuche also die Schwingungs-Maxima befinden sich stets auf den Schalen, wie schon in Kapitel 2.4 bei der Grundfrequenz gezeigt.

Zu dieser Grundschiwingung kommen noch entsprechende Oberwellen hinzu:

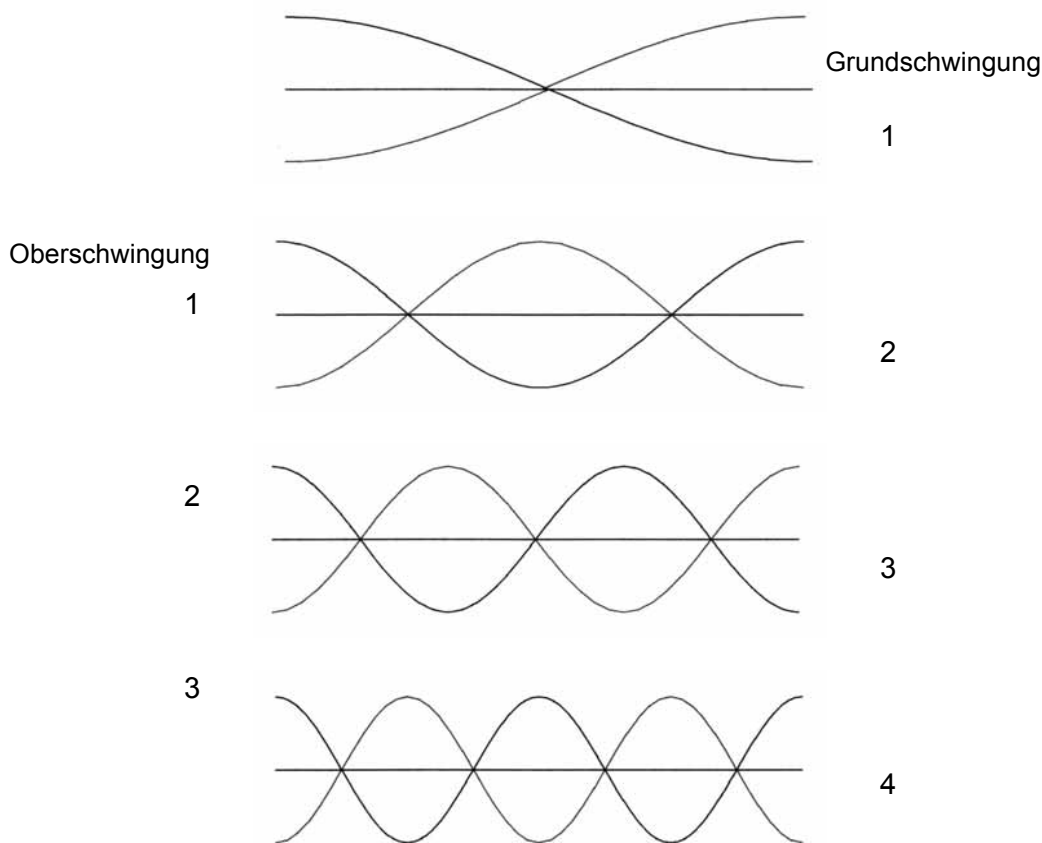


Abbildung 2.6.3 – Radiale Oberwellen

2.6.2 - Gleichung: $\lambda_n = \frac{4L}{n}$ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

2.6.3 - Satz: Die Schichten sind **stationäre** Extremalzustände und bilden radiale **stehende** Wellen.

3.0 – Frequenzen der Erde

Nach Kapitel 2.4 gilt für die Grundfrequenz eines Schwingungsgefüges:

Grundschiwingung 1
$$f = \frac{c}{4R \cdot \sin \frac{\pi}{2n}} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Die Grundfrequenz ($n=1$) für ein Schwingungsgefüge lautet:

2
$$f_o = \frac{c}{4R}$$

Für die Variablen R , c wurden folgende Werte benutzt:

$c = 299792458$ m/s als Lichtgeschwindigkeit

3 Unter dem **WGS84** versteht man ein globales geodätisches Referenzsystem, auf dessen Grundlage Positionen auf der Erde und im erdnahen Raum ermittelt werden. Das WGS84 liefert zwei Erdradien:

Polradius: 6356752 m
Äquatorradius: 6378137 m

4 Es existieren zwei Radien, folglich auch jeweils zwei Frequenzen:

n	Polradius	Äquatorradius
1	11,7903 Hz	11,7508 Hz
2	16,6740 Hz	16,6181 Hz
3	23,5806 Hz	23,5016 Hz

3.0.1 - Satz: Die Grundfrequenz der Erde beträgt etwa 11,7 Hz.
 $f_o \approx 11,7$ Hz

3.1 – Sferics

Zwischen 1978 und 1979 fanden in Pfaffenhofen durch Baumer und Sölling spezielle Frequenzmessungen statt.

Mit einer schmalbandigen Bandbreite (2 kHz) wurden die Frequenzbereiche um 10 kHz und 27 kHz fortlaufend über eine Empfangsanlage aufgenommen. Die Reichweite des Empfängers wurde dabei auf 400-500 Km beschränkt.

Dies führte zur Entdeckung der Sferics, die auch als Wetterfrequenzen bekannt sind. Die Frequenzfolge wird allgemein angegeben mit:

4150,84 Hz	
6226,26 Hz	
8301,26 Hz	
10377,10 Hz	Siehe dazu auch "Das natürliche elektromagnetische
12452,52 Hz	Impuls-Spektrum der Atmosphäre" 1982 von Baumer
28018,17 Hz	und Eichmeier sowie in „Sferics“ Seite 285, 1987 von
49810,08 Hz	Hans Baumer

Die **Sferic-Grundfrequenz** ist **4150,84 Hz**.

Die anderen Frequenzen stellen lediglich Oberwellen dar, stehen also in harmonischen Verhältnissen zur Sferic-Grundfrequenz.

Eine Primfaktorenzerlegung bezüglich der beiden Grundfrequenzen der Erde ergibt:

Äquatorradius $4150,84 : 11,75 = 353,263 \approx 353 = \text{Primzahl}$

Polradius $4150,84 : 11,79 = 352,064 \approx 352$

$$352 = 11 \cdot 32 = 11 \cdot 2^5$$

Die Rückrechnung für die Sferics ergibt:

Äquatorradius: $11,75 \cdot 11 \cdot 2^5 = 4136,27 \text{ Hz}$

Polradius: $11,79 \cdot 11 \cdot 2^5 = 4150,19 \text{ Hz}$

Für den Äquatorradius ergibt sich eine Differenz von 14,57 Hz zur Sferic-Grundfrequenz

Für den Polradius ergibt sich eine Differenz von 0,65 Hz zur Sferic-Grundfrequenz.

Die Sferic-Grundfrequenz wird als Referenz benutzt, um die Erd-Grundfrequenz zu definieren:

$$4150,84 : 352 = 11,79215909 = \text{korrigierte Grundfrequenz}$$

3.1.1 - Definition: $f_0 = 11,7921591 \text{ Hz} = \text{Erdgrundfrequenz}$

3.1.2 - Satz: **Die Sferic-Grundfrequenz ist die 5. Oktave der 10. Oberwelle der Erdgrundfrequenz.**

Bemerkung:

11. Eigenschwingung = 10. Oberwelle

Nimmt man eine beliebige Frequenz als Grundschwingung, dann wird diese auch als erste Eigenschwingung bezeichnet. Die erste Oberwelle zur Grundschwingung ist dann die zweite Eigenschwingung.

Allgemein: die n-te Oberwelle ist die (n+1)-te Eigenschwingung.

Vergleicht man die gemessene Sfericfrequenz mit den beiden abgeleiteten Frequenzen ist die Konsequenz also, dass die Sfericfrequenz in Relation zum **Polradius** steht und nicht zum Äquatorradius.

Der Unterschied zwischen Polfrequenz und Äquatorfrequenz beträgt immerhin etwa 14 Hertz. In seinem Buch „Die kosmische Oktave“ (Seiten 38-41) stellt Cousto einen Zusammenhang zwischen Sfericfrequenz und Sterntag her.

Nach einem siderischen Tag steht die Sonne, in Bezug auf die Sterne, wieder an der gleichen Stelle des Himmels. Dies entspricht einer geometrisch vollständigen Umdrehung der Erde von 360° in einem sternfixiertem System. Der mittlere siderische Tag der Erde dauert 23 Stunden, 56 Minuten, 4,099 Sekunden.

Der Vergleich der Sferics mit der Erdrotation liefert eine Differenz von etwa 3 Hz. Um den Zusammenhang zwischen Sferics und Sterntag aufrecht zu erhalten, musste Cousto die Sfericfrequenzen herunter teilen (Seite 199) und kann sie dann erst mit der siderisch erzeugten Tonleiter vergleichen.

Durch diese Teilung wird auch der Fehler entsprechend verkleinert. Stellt man von vornherein den Bezug zum Polradius her, ist dieser „Rechentrick“ nicht nötig.

Es ist auch manchmal nachzulesen, dass die Differenz als Messfehler interpretiert wird. Hier sollte man sich aber folgendes vor Augen halten:

Der gemessene Wert für die Sferic-Grundfrequenz wird mit 2 Stellen hinter dem Komma angegeben. Damit beläuft sich der Fehler aber höchstens auf $\pm 0,05$ Hz oder mit einer gewissen Großzügigkeit auf $\pm 0,1$ Hz.

Richtet man sich nach Cousto's Angabe und interpretiert den Messwert mit einem Fehler von 14 Hz, so wäre die ganze Messung zwecklos, da sie mit einem systematischen Fehler behaftet wäre.

Heutige Messungen, gerade im elektrotechnischen Bereich (also auch bei Frequenzen), sind jedoch sehr exakt, so dass die Angabe von 4150,84 Hz als korrekt anzusehen ist.

Wie der Schwingungsansatz auch zeigt, lässt sich die Sferic-Grundfrequenz mit hinreichender Genauigkeit (Ungenauigkeit $< 0,7$ Hz) ableiten.

Die durch die Erdgrundfrequenz erzeugten Oberwellen sind über das gesamte Frequenzspektrum der Sferics hinweg mit einer Ungenauigkeit kleiner 0,7 Hz behaftet.

Während bei Cousto die Differenz zwischen Sferic-Wert und errechnetem äquatorialem Wert bei steigenden Frequenzen immer größer wird. Wegen dieser mangelnden Konvergenz ist dies, mathematisch gesehen, ein sicherer Indikator dafür, dass die von Cousto publizierte Lösung nur eine Näherung darstellt.

3.2 – Grundhülle

Die korrigierte Grundfrequenz erlaubt eine Rückrechnung für den Erdradius. Ein Umstellen der Gleichung für die Grundfrequenz ergibt:

$$f_o = \frac{c}{4R} \longrightarrow R = \frac{c}{4f_o}$$

Für die Variablen c , f_o wurden folgende Werte benutzt:

$f_o = 11,7921591$ Hz = Erdgrundfrequenz

$c = 299792458$ m/s als Lichtgeschwindigkeit

Für den Radius ergibt sich:

3.2.1 - Definition: $R = 6355758,426$ m = L_o = Grundhülle

Der Vergleich mit dem Geodätischen Referenzsystem WGS84 zeigt:

Polradius: 6356752 m

Äquatorradius: 6378137 m

Die Grundhülle, auf der die Null-Linien und Extrema (Quellpunkte) liegen, befindet sich auf einem Radius der zwischen **einem und zwanzig Kilo-meter unter** der Erdoberfläche liegt.

Damit lässt sich das Schwingungsgefüge für die Erde definieren:

3.2.2 - Definition: **Erd-Schwingungsgefüge**
= Summe **aller** möglichen Raum-Gitter
auf der Grundhülle

3.3 – Tabelle der Erdschichten

Durch einsetzen der Grundhülle L_0 in die Gleichung für ein Schichtungsgefüge erhält man die Gleichung für die **Schichten des Erdschwingungsgefüges**.

3.3.1 - Gleichung:

$$L_{Erde} = L_o \cdot \left(\cos \frac{m\pi}{n} + \sqrt{4k^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2n} - \sin^2 \frac{m\pi}{n}} \right) \quad n, m, k \in \mathbb{N}.$$

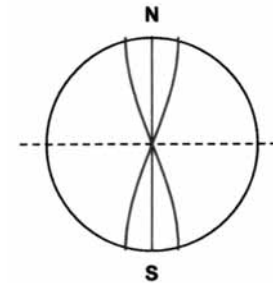
Aus der Gleichung resultiert die Tabelle aller Erdschichten. Hier ein Auszug bis $n = 4$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
n m								
1 1	6355,76	19067,28	31778,79	44490,31	57201,83	69913,34	82624,86	95336,38 Km
2 1	6355,76	16815,76	26205,46	35387,37	44490,31	53554,57	62596,96	71625,76 Km
2 2	2632,64	11621,04	20609,44	29597,84	38586,24	47574,64	56563,04	65551,44 Km
2 4	15344,16	24332,56	33320,96	42309,36	51297,76	60286,16	69274,56	78262,96 Km
3 1	6355,76	14635,89	21433,41	27997,91	34476,36	40913,10	47326,39	53725,14 Km
4 1	6355,76	13122,94	18378,41	23426,02	28397,82	33333,04	38247,73	43149,72 Km
4 2		7365,95	13136,72	18390,65	23477,33	28486,50	33452,99	38393,37 Km
4 3		4134,54	9390,01	14437,62	19409,42	24344,64	29259,33	34161,32 Km
4 4		3373,22	8237,70	13102,19	17966,68	22831,16	27695,65	32560,14 Km

Es muss jetzt noch eine Umsortierung nach Größe erfolgen. Mit der sortierten Tabelle ist ein **direkter Vergleich** mit den Tiefen der geologischen Schalen und den Höhen der atmosphärischen Schichten möglich.

3.4 – Schichten und Frequenzen

Nach Kapitel 2.6 kann jeder Schicht eine Frequenz zugeordnet werden. Die Grundschiwingung verhält sich dabei als ob der Poldurchmesser der Erde an seinen Polen frei schwingen würde.



$$f = \frac{c}{4R}$$

Abbildung 3.4.1 – Grundschiwingung

Aus der Tabelle der Erdschichten lässt sich so eine **Frequenztabelle** generieren. Für $n = 1$ ergibt sich:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
n m								
1 1	11,79	3,93	2,358	1,68	1,31	1,07	0,907	0,786 Hz
	6355,76	19067,28	31778,79	44490,31	57201,83	69913,34	82624,86	95336,38 Km

Für $n = 1$, $k = 2$ ergibt sich:

3,93 Hz = die halbe Schumann-Frequenz = $f_s / 2$

Für $n = 1$ existiert noch ein weiterer einfacher Zusammenhang zwischen der Grundhülle und den anderen erzeugten Schichten:

	k	1	2	3	4	5	6	7	8
n	m								
1	1	L_o	$3L_o$	$5L_o$	$7L_o$	$9L_o$	$11L_o$	$13L_o$	$15L_o$

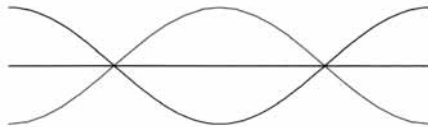
Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang:

3.4.1 - Gleichung:

$$\frac{f_s}{2} = \frac{f_o}{3} \longrightarrow f_s = \frac{2}{3} f_o$$

Die Erdfrequenz ist die Quinte der Schumannfrequenz

Nach Kapitel 2.6 gilt dann für die erste Oberwelle:



$$f = \frac{c}{2R}$$

Abbildung 3.4.2 – Oberschwingung

k	1	2	3	4	5	6	7	8	
n	m								
1	1	23,584	7,861	4,716	3,369	2,62	2,143	1,814	1,572 Hz
		6355,76	19067,28	31778,79	44490,31	57201,83	69913,34	82624,86	95336,38 Km

3.4.2 - Satz:

Die Schumann-Frequenz ist im Frequenzspektrum der Erde enthalten.

Tabelle der Erdfrequenzen für $n \leq 4$, $m \leq n$, $k \leq 8$

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	
n	m									
1	1	11,79	3,93	2,358	1,68	1,31	1,07	0,907	0,786	Hz
2	1	11,79	4,457	2,86	2,118	1,685	1,399	1,197	1,046	Hz
2	2	28,469	6,449	3,637	2,532	1,942	1,575	1,325	1,143	Hz
2	4	4,884	3,08	2,249	1,771	1,461	1,243	1,082	0,958	Hz
3	1	11,79	5,121	3,497	2,677	2,174	1,832	1,584	1,395	Hz
4	1	11,79	5,711	4,078	3,199	2,639	2,248	1,96	1,737	Hz
4	2		10,175	5,705	4,075	3,192	2,631	2,24	1,952	Hz
4	3		18,127	7,982	5,191	3,861	3,079	2,562	2,194	Hz
4	4		22,219	9,098	5,72	4,172	3,283	2,706	2,302	Hz

3.5 – Schumann-Frequenz

Der deutsche Physiker Dr. W. O. Schumann von der Technischen Universität München wollte seinen Studenten 1952 Übungsaufgaben zur Elektrizitätslehre stellen. Thema war damals die Berechnung von **Hohlraumresonatoren**.

Dabei gab er vor, dass die Unterseite der Ionosphäre, also die Heavisideschicht, die eine Kugel und die Erdoberfläche die andere Kugel des Resonators sein sollte. Die Aufgabe bestand darin, die Eigenfrequenz (Resonanz) dieses Hohlraumresonators zu ermitteln. Als Ergebnis erhielt er 7,8 Hz.

Diese Aufgabe lässt sich nur mittels der Differential bzw. Integralrechnung lösen. Und die Lösung erfolgt über die Ermittlung sogenannter transversalmagnetischer Wellen (TM-Wellen) in einem Hohlraumresonator. Diese werden heute als **Schumannwellen** oder auch **Schumann-Resonanzen** bezeichnet.

Die Schumann-Frequenz ist die Eigenfrequenz des Erdoberflächen-Ionosphären-Hohlraumresonators. Die Konsequenz ist:

3.5.1 - Satz: **Die Schumann-Frequenz ist die Eigenfrequenz der Atmosphäre.**

3.5.2 - Definition: **Schumannfrequenz = $f_s = 7,83$ Hz**

Aus den Gleichungen 2.4.3 und 3.10.1 lassen sich zwei einfache Relationen der Erdfrequenz und der Schumann-Frequenz zur Grundhülle L_0 ableiten:

3.5.3 - Gleichungen:

$$f_o = \frac{c}{4L_o} \qquad f_s = \frac{c}{6L_o}$$

Es existiert noch folgender Zusammenhang zu den Sferics:

Sferic-Grundfrequenz: $4150,84 \text{ Hz} = 11 \cdot 2^5 f_o$ und $f_o = 3/2 f_s$

Es gilt daher auch:

Sferic-Grundfrequenz: $4150,84 \text{ Hz} = 33 \cdot 2^4 f_s$
33. Eigenschwingung = 32. Oberwelle

3.5.3 - Satz: **Die Sferic-Grundfrequenz ist die 4. Oktave der 32. Oberwelle der Schumannfrequenz.**

3.6 – Zusammenfassung

Die Sferics sind physikalisch als elektromagnetische Wellen nachgewiesen.

Die Sferic-Grundfrequenz ist die 5. Oktave der 10. Oberwelle der Erdfrequenz. Die Sferic-Grundfrequenz ist gleichzeitig die 4. Oktave der 32. Oberwelle der Schumannfrequenz.

Die Sferic-Frequenzen sind im Spektrum der Erdfrequenzen enthalten.

Die Schumann-Frequenz ist physikalisch als elektromagnetische Welle nachgewiesen.

Die Schumann-Frequenz beträgt zwei Drittel der Erdfrequenz - Die Erdfrequenz ist die **Quinte** der Schumannfrequenz.

Die Schumann-Frequenz ist im Spektrum der Erdfrequenzen enthalten.

Es besteht ein Zusammenhang von elektromagnetischen Schwingungen mit dem Erd-Schwingungsgefüge.

Hier entsteht die Frage, ob ein Zusammenhang des Erdmagnetfeldes bzw. des elektrischen Feldes mit dem Erd-Schwingungsgefüge existiert? Dazu muss das Erdmagnetfeld betrachtet werden.

4.0 – Schichtungsgefüge

Eine stehende Welle auf einer Kugel erzeugt ein **rotationssymmetrisches** räumliches Gefüge:

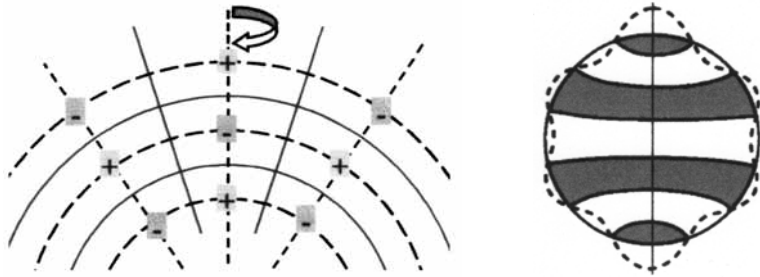


Abbildung 4.0.1 – Rotationssymmetrie

4.0.1 - Satz: Die **Pole** liegen **kreisförmig** auf konzentrischen Kugelschalen.

4.0.2 - Satz: Die **Null-Flächen** bilden **konzentrische Kegel** und **konzentrische Kugelschalen**.

Die konzentrischen Kegel aus Nullflächen besitzen eine erstaunliche Ähnlichkeit zu Konfigurationen aus dem Orbitalmodell.

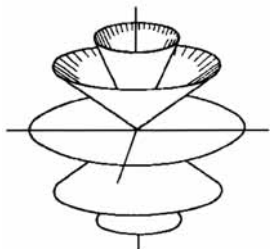


Abbildung 4.0.2 – Nullflächen

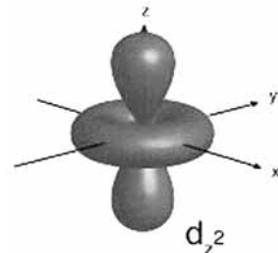


Abbildung 4.0.3 – Atomorbital

Gemeinsam besitzen diese Schwingungsfiguren auch noch die Eigenschaft, dass sie rotationssymmetrisch sind.

4.0.3 - Definition: **Schichtungsgefüge**
= von **einer** stehenden Welle erzeugte **radiale Schichtungsstruktur**

4.1 – Raum-Gitter

Zwei stehende Wellen auf einer Kugel erzeugen ein radiales gitterförmiges Gefüge:

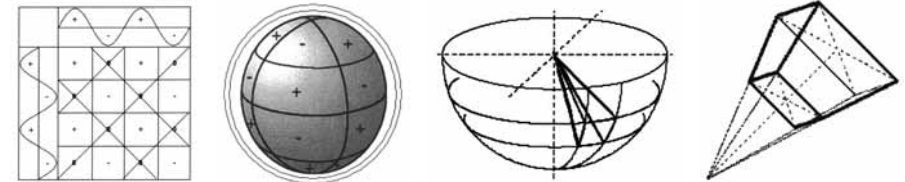


Abbildung 4.1.1 – Räumliches Gitter

4.1.1 - Definition: **Raum-Gitter**
= von **zwei** stehenden Wellen erzeugtes **radiales Schichtungsgefüge**

Es ergeben sich **zwei** Betrachtungsmöglichkeiten:

4.1.2 - Definition:

Die **Nullflächen** bilden die Wände eines gitterförmigen radialen Schwingungssystems im folgenden **Nullgitter** genannt.

Die **Pole** liegen im Mittelpunkt des jeweils **einhiüllenden** Null-Quaders.

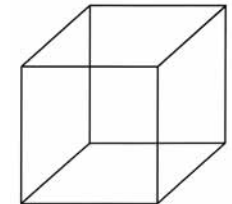


Abbildung 4.1.2 – Nullquader

4.1.3 - Definition:

Die **Pole** bilden ebenfalls ein gitterförmiges radiales Schwingungssystem, **ähnlich einem molekularem Gitter** (z.B. NaCl) im folgenden **Polgitter** genannt.

Die **Polverbindungen** verhalten sich wie Stäbe die an beiden Enden frei schwingen.

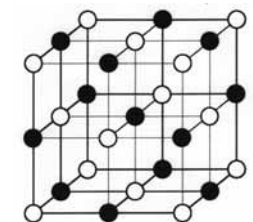


Abbildung 4.1.3 – Polgitter

4.2 – Räumliches Schwingungsgefüge

Ausgangspunkt ist eine stehende Welle um eine Kugel

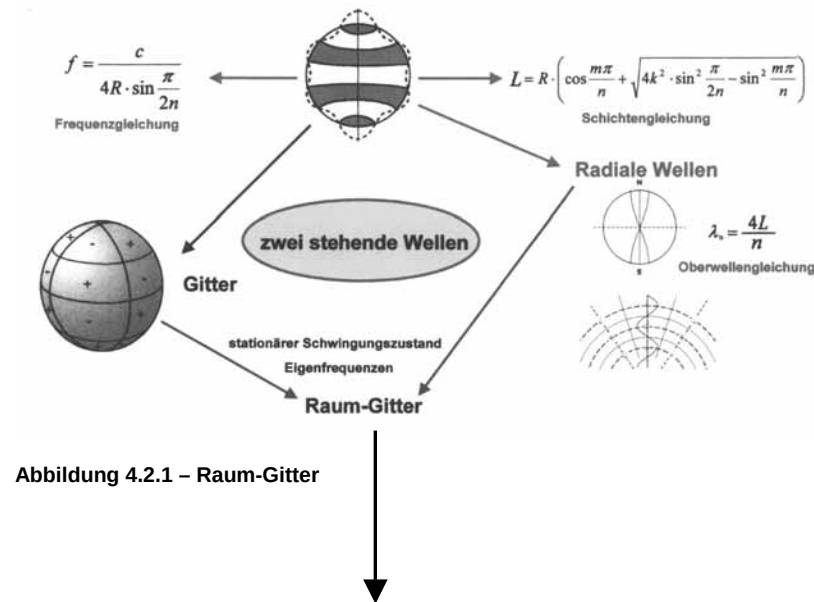


Abbildung 4.2.1 – Raum-Gitter

4.2.1 - Definition: **räumliches Schwingungsgefüge**
= Summe **aller** möglichen Raum-Gitter auf einer Kugel

Konsequenz:

Es ist nur **1** stehende Welle notwendig, um eine räumliche **Schichtungsstruktur** zu erzeugen.

Es sind **2** stehende Wellen notwendig, um eine räumliche **Schwingungsstruktur** zu erzeugen.

4.3 – Globalnetzgitter

Mit den Definitionen zum Raumgitter und zum Schwingungsgefüge kann man den Begriff des Globalnetzgitter einführen. Allgemein lässt sich folgendermaßen definieren:

4.3.1 - Definition: **Globalnetzgitter**
= Summe von Raum-Gittern

Die beteiligten Raum-Gitter bilden dabei in der Regel **harmonikale** Verhältnisse. Darunter versteht man ganzrationale Zahlen bzw. Zahlen in Bruchdarstellung. Der Begriff Harmonik entstammt der Musik und meint den harmonischen Zusammenklang der Töne.

Beispiel:

Wenn ein beliebig gewählter Grundton als 1 angesetzt wird, ergibt sich die Terz mit 5:4 und die Quinte mit 3:2. Alle drei Töne ergeben dann zusammen die als Dreiklang bekannte Tonkombination. Somit stellen die Zahlen 1 und 5/4 sowie 3/2 harmonikale Verhältnisse dar.

4.3.2 - Satz: **Schwingungsgefüge**
= Summe von Globalnetzgitter

Bemerkung:

Wenn Gitter durch harmonikale Verhältnisse miteinander in Beziehung stehen, existieren in der Regel Kürzungsfaktoren. Geometrisch gesehen entstehen dadurch **Überlappungen** der Gitterwände bzw. Gitterlinien. Es bedeutet das einige Gitterwände bzw. Gitterlinien von mindestens zwei Raumgittern zusammen fallen.

Eine Überlappung der Gitter gehört dann quasi zur Natur des Systems.

4.4 – Allgemeiner Ansatz

Mit der Konstruktion des räumlichen Schwingungsgefüges steht ein mathematisch/physikalisches Modell zur Verfügung, dass es ermöglicht Strukturen der Erde auf einer Schwingungsbasis zu erklären.

Die Frage ist:

Wie lautet ein allgemein möglicher Ansatz für ein Schwingungsgefüge? Die Antwort liefert die Laplace-Gleichung.

Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (28.03.1749 bis 05.03.1827) war ein französischer Mathematiker, Physiker und Astronom. Er arbeitete unter anderem auf den Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Differentialgleichungen.

Laplace war immer mehr Physiker als Mathematiker. Die Mathematik diente ihm nur als Werkzeug. Heute sind aber die mathematischen Verfahren, die Laplace entwickelte und anwandte, wichtiger geworden als sein eigentliches astronomisches Werk.

Die wichtigsten mathematischen Werkzeuge sind der Laplace-Operator, die Laplace-Gleichung der Laplacesche Entwicklungssatz, sowie die Laplace-Transformation.

Der Laplace-Operator Δ ist ein mathematischer Operator d.h. es handelt sich hier um eine allgemeine mathematische Vorschrift (Rechenweg). Der Laplace-Operator ist ein vektorieller Differentialoperator innerhalb der mehrdimensionalen Analysis.

Der Laplace-Operator tritt beispielsweise in der Laplace-Gleichung auf. Zweimal stetig differenzierbare Lösungen dieser Gleichung heißen harmonische Funktionen.

Laplace-Gleichung: $\Delta f = 0$ gelesen: Nabla f gleich null

In kartesischen Koordinaten (x,y,z) ausgedrückt:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

In nur einer Dimension gilt dann:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

Das lässt sich als Gleichung für einen harmonischen Oszillator interpretieren, also z.B. ein Pendel oder eine Feder ohne Reibung.

Die Laplace-Gleichung stellt somit eine mathematische Formel zur Beschreibung von Schwingungsphänomenen **im Raum** dar.

Der allgemein übliche Ansatz für eine Lösung mit einer zentralen Konfiguration besteht darin die kartesischen Koordinaten (x,y,z) in Kugelkoordinaten (λ, φ, r) zu transformieren.

Dann wird die gesamte Funktion in zwei Teilfunktionen zerlegt. Wobei eine Funktion den **Winkelanteil** und die andere Funktion den **Radialanteil** enthält.

Der allgemeine Ansatz für eine Lösungsfunktion der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten sieht dann so aus:

$$f(r, \lambda, \varphi) = \sum R(r) \cdot Y(\lambda, \varphi)$$

Die beiden Teilfunktionen **R** und **Y** lassen sich jeweils einzeln lösen.

4.4.1 – Winkelanteil

Für den Winkelanteil wird allgemein folgende Lösungsfunktion angegeben:

$$Y(\lambda, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot N_m \cdot P_m \cdot \cos \lambda \cdot e^{im\varphi}$$

Das sind die Kugelflächenfunktionen in komplexer Schreibweise.

Es gilt: $e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i \cdot \sin(m\varphi)$

Die N_m und P_m sind die sogenannten Legendre-Polynome, die sich in unserer Betrachtung aber wie Konstanten handhaben lassen.

Also insgesamt:

$$Y(\lambda, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot N_m \cdot P_m \cdot \cos \lambda \cdot (\cos m\varphi + i \cdot \sin m\varphi)$$

Multipliziert man die Klammer aus so ergibt sich:

$$Y(\lambda, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot N_m \cdot P_m \cdot [\cos \lambda \cdot \cos m\varphi + i \cdot \cos \lambda \cdot \sin m\varphi]$$

Und hier erkennt man wieder die multiplikativ verbundenen Sinus- und Kosinusfunktionen, also **tesserales Kugelflächenfunktionen** bzw. Gitter. Hier nur mit einem realen und einem imaginären Anteil versehen, also eine komplexe Funktion als allgemeine Lösung des Winkelanteils der Laplace-Gleichung.

4.4.2 – Radialanteil

Für den Radialanteil gilt allgemein als eine mögliche Lösung:

$$R(r) = A \cdot e^{-kr} + B \cdot e^{kr}$$

Wobei hier auch nur eine der additiven Komponenten als Lösung auftauchen kann. Was von den jeweiligen Randbedingungen abhängig ist. Wie noch zu sehen sein wird, gehorcht auch das Erdschwingungsgefüge mit seinem Radialanteil der Laplace-Gleichung.

Die radiale Gleichung bzw. der Ansatz auf atomare Konfigurationen angewendet führt zur Schrödinger-Gleichung.

Das Verhalten von quantenmechanischen Teilchen wird durch die sogenannte Wellenfunktion beschrieben. Die Wellenfunktion wird als mathematische Lösung der Schrödinger-Gleichung gewonnen.

Allen Wellengleichungen ist gemeinsam, dass mit der Welle Energie in eine Richtung transportiert wird.

In einer Teilchenwelle der Schrödinger-Gleichung wird aber nicht nur Energie transportiert, sondern auch ein Teilchen, z.B. ein Elektron. Wie alle anderen Wellen hat eine Teilchenwelle zwei Komponenten, die mathematisch meist als Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion angegeben werden.

Nach der Kopenhagener Deutung oder Wahrscheinlichkeitsinterpretation geben beide Anteile der Schrödinger-Gleichung gemeinsam die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Teilchen anzutreffen ist. Wo einer oder beide Anteile groß sind, ist das Teilchen mit großer Wahrscheinlichkeit zu finden. Wo beide Anteile Null sind, ist das Teilchen garantiert nicht vorhanden. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung liefert also Wahrscheinlichkeiten für den Aufenthalt

der Teilchen. Daraus entwickeln sich die sogenannten **Orbitale**, so wie sie in der Chemie benutzt werden.

Da sowohl im Atommodell, als auch die in diesem Buch entwickelten Schwingungs- und Schichtungsgefüge, als Grundlage Schwingungen um ein Zentrum benutzen (siehe Kapitel 2.0), sollte es also nicht verwundern wenn Übereinstimmungen in den Schwingungsfiguren existieren, wie in den Abbildungen 4.1.2 und 4.1.3 dargestellt.

Erstaunlich ist aber doch die große Ähnlichkeit, da in das Atommodell ja noch eine Reihe von physikalischen Größen wie Zentrifugalpotential, Coulombpotential und quantenmechanischer Drehimpuls eingehen.

Diese Größen bestimmen die Randbedingungen der zugrunde liegenden Differentialgleichung und erschaffen ja so erst die charakteristischen Figuren der Orbitale.

4.4.3 – Allgemeines

Eine Funktion die eine Lösung der Laplace-Gleichung darstellt besitzt stets zwei Eigenschaften:

- 1) Sie ist zweimal stetig differenzierbar.
- 2) Ihre zweite Ableitung ist gleich der Ursprungsfunktion, multipliziert mit einer Konstanten.

Allgemein lässt sich das für den Radialanteil so formulieren:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = k^2 \cdot f$$

Das gilt natürlich entsprechend auch für den Winkelanteil.

Mit der Konsequenz das als Lösungsfunktionen für die Laplace-Gleichung praktisch nur noch **Winkelfunktionen** und **e-Funktionen** in Betracht zu ziehen sind.

Literaturverzeichnis

- | | | |
|---|--|--|
| Baumer, Eichmeier | Das natürliche elektromagnetische Impuls-Spektrum der Atmosphäre
Archives for meteorology, geophysics and Bioclimatology
Springer Verlag, Ser A 31, 249-261, 1982 | Gerthsen Christian, Kneser H.O., Vogel Helmut
Physik
13. überarbeitete Auflage, Springer Verlag, 1977 |
| Baumer, Hans | Sferics
Die Entdeckung der Wetterstrahlung
Rowohlt Verlag, Hamburg, 1987 | IUGG/IAGA
IGRF-1980 / IGRF-2005
International Union of Geodesy and Geophysics
IAGA, the International Association of Geomagnetism and Aeronomy
http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/ |
| Berckhemer, Hans | Grundlagen der Geophysik
Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1990 | Kittel Charles
Einführung in die Festkörperphysik
5. überarbeitete Auflage
R. Oldenburg Verlag München Wien 1980 |
| Bird, Christopher | Planetary Grid
New Age Journal, Mai 1975 | Kittel C., Knight W., Ruderman M., Helmholz C., Moyer B.
Mechanik
Berkeley Physik Kurs 1
Friedr. Vieweg+ Sohn Verlag, Braunschweig, 1979 |
| Bischof, Marco | Der Kristallplanet
Ideengeschichte der globalen Gitternetze
Zeitschrift Hagia Chora, Nr.7 (2000/2001) - Nr.19 (August 2004) | Lundquist C.A., Veis G.
Geodetic parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth
SAO Spec.Rep200, Cambridge/Mass. 1966 |
| Brauch Wolfgang, Dreyer | Hans-Joachim, Haacke Wolfhart
Mathematik für Ingenieure
6. überarbeitete Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 1981 | McLean S., Macmillan S., Maus S., Lesur V., Thomson A., Dater D.
The US/UK World Magnetic Model for 2005-2010
NOAA Technical Report NESDIS/NGDC-1, December 2004 |
| Cousto | Die kosmische Oktave
Synthesis Verlag, Essen, 1984 | Nevanlinna H., Pesonen L.J., Blomster R.
Earth magnetic field charts (IGRF1980)
Geological Survey of Finland Report, Q19/22,0/World/1983/1 |
| Dobrinski Paul, Krakau Gunter, Vogel Anselm | Physik für Ingenieure
5. überarbeitete Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 1980 | NGDC
WMM-2005
National Geophysical Data Center
http://www.ngdc.noaa.gov/ |
| Gauß C.F., Weber W. | Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus
Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838
Eds. C.F. Gauß, W. Weber, 1-57
Dieterichsche Buchhandlung, Göttingen, 1839 | Piontzik, Klaus
Das Magnetfeld der Erde
Zeitschrift für Geobiologie - Wetter, Boden, Mensch S.35-52, 2-2002 |

- Piontzik, Klaus Planetare Systeme
Zeitschrift für Geobiologie - Wetter, Boden,
Mensch 3-2009, 4-2009, 2-2010, 3-2010
- Piontzik, Klaus Gitterstrukturen des Erdmagnetfeldes
BOD Verlag, Juli 2007
Siehe auch: <http://www.pimath.eu/>
- Piontzik, Klaus, Claude Bärtels
Planetare Systeme
BOD Verlag, Juli 2012
- Piontzik Klaus, Ebergs Gerrit, Jähn Ulrich
Deutsches Patent 102012011759.0
Verfahren zur Messung von magnetischen Wellen
- Purcel, Edward M. Elektrizität und Magnetismus
Berkeley Physik Kurs 2
Friedr. Vieweg+Sohn Verlag, Braunschweig, 1979
- Schumann, W.O. Über die strahlungslosen Eigenschwingungen
einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht
und einer Ionosphärenhülle umgeben ist
Zeitschrift Naturforschung 7a, 149-154, 1954
- Schumann, W.O. Über elektrische Eigenschwingungen der
Hohlraumes Erd-Luft-Ionosphäre, erregt durch
Blitzentladungen
- Stieglitz R., Müller U. Kann man das Magnetfeld im Labor simulieren?
Forschungszentrum Karlsruhe
Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6223, 1999
- Torge, Wolfgang Geodäsie
1975, Walter de Gruyter, Berlin, New York
Sammlung Göschen 2163